Aidot holomorfiset kuvaukset

Katariina Parviainen

2021

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author

Katariina Parviainen

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Aidot holomorfiset kuvaukset

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Syyskuu 2021	53 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Tutkielmassa käsitellään avaruuden $\mathbf{C}^n$ aitoja holomorfisia kuvauksia. Niiden määritelmät perustuvat aidon kuvauksen lauseeseen ja kuvausten holomorfisuuteen. Olkoon $\Omega, D \subset \mathbf{C}^n$, ja olkoon $n > 1$. Kuvaus $F : \Omega \to D$ on aito kuvaus, jos $F^{-1}(K)$ on kompakti Ω:n osajoukko jokaiselle kompaktille joukolle $K \subset D$. Holomorfisuus tarkoittaa kuvauksen kompleksista analyyttisyyttä, kompleksista differentioituvuutta sekä sitä, että kuvaus toteuttaa Cauchy-Riemannin yhtälöt. Funktio f on holomorfinen avaruuden $\mathbf{C}^n$ avoimessa joukossa Ω, jos sille pätee $f : \Omega \to \mathbf{C}$, $f \in C^1(\Omega)$, ja jos se toteuttaa Cauchy-Riemannin yhtälöt $\overline{\partial}_j f = \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} = 0$ jokaiselle $j = 1, \ldots, n$. Kuvaus $F = (f_1, \ldots, f_m) : \Omega \to \mathbf{C}^m$ on holomorfinen joukossa Ω, jos funktiot f_k ovat holomorfisia jokaisella $k = 1, \ldots, m$.

Jos Ω ja D ovat kompleksisia joukkoja, ja jos $F : \Omega \to D$ on aito holomorfinen kuvaus, tällöin $F^{-1}(y_0)$ on joukon Ω kompakti analyyttinen alivaristo jokaiselle pisteelle $y_0 \in D$.

Aito kuvaus voidaan määritellä myös seuraavasti: Kuvaus $F : \Omega \to D$ on aito jos ja vain jos F kuvaa reunan $\partial\Omega$ reunalle ∂D seuraavalla tavalla:

$$\text{jos } \{z_j\} \subset \Omega \quad \text{on jono, jolle } \lim_{j\to\infty} d(z_j, \partial\Omega) = 0, \text{ niin } \lim_{j\to\infty} d(F(z_j), \partial D) = 0.$$

Tämän määritelmän perusteella kuvausten $F : \Omega \to D$ tutkiminen johtaa geometriseen funktioteoriaan kuvauksista, jotka kuvaavat joukon $\partial\Omega$ joukolle ∂D. Käy ilmi, että aidot holomorfiset kuvaukset laajenevat jatkuvasti määrittelyalueittensa reunoille.

Holomorfisten kuvausten tutkiminen liittyy osaltaan Dirichlet-ongelmien ratkaisemiseen. Klassisessa Dirichlet-ongelmassa etsitään joukon $\partial\Omega \subset \mathbf{R}^m$ jatkuvalle funktiolle f reaaliarvoista funktiota, joka on joukossa Ω harmoninen ja joukon Ω sulkeumassa $\overline{\Omega}$ jatkuva ja jonka rajoittuma joukon reunalle $\partial\Omega$ on kyseinen funktio f.

Tutkielmassa käydään läpi määritelmiä ja käsitteitä, joista aidot holomorfiset kuvaukset muodostuvat, sekä avataan matemaattista struktuuria, joka on näiden käsitteiden taustalla.

Tutkielmassa todistetaan aidolle holommorfiselle kuvaukselle $F : \Omega \to \Omega'$ ominaisuudet: F on suljettu kuvaus, F on avoin kuvaus, $F^{-1}(w)$ on äärellinen jokaiselle $w \in \Omega'$, on olemassa kokonaisluku m, jolle joukon $F^{-1}(w)$ pisetiden lukumäärä on m jokaiselle F:n normaalille arvolle, joukon $F^{-1}(w)$ pisteiden lukumäärä on penempi kuin m jokaiselle F:n kriittiselle arvolle, F:n kriittinen joukko on Ω':n nollavaristo, $F(V)$ on Ω':n alivaristo aina, kun V on Ω:n alivaristo, F laajenee jatkuvaksi kuvaukseksi aidosti pseudokonveksien määrittelyjoukkojensa reunoille, F kuvaa aidosti pseudokonveksin lähtöjoukkonsa jonon, joka suppenee epätangentiaalisesti kohti joukon reunaa, jonoksi joka suppenee hyväksyttävästi kohti kuvauksen maalijoukon reunaa, kuvaus F avaruuden $\mathbf{C}^n$ yksikköpallolta itselleen on automorfismi.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Aito kuvaus, holomorfinen kuvaus, $\mathbf{C}^n$-avaruus, Pseudokonveksi joukko, Henkinin lause

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Sisältö

1 Johdanto

Olkoon $\Omega, D \subset \mathbf{C}^n$, ja olkoon $n > 1$. Kuvaus $F : \Omega \to D$ on aito kuvaus, jos $F^{-1}(K)$ on kompakti Ω:n osajoukko jokaiselle kompaktille joukolle $K \subset D$. Jos Ω ja D ovat kompleksisia joukkoja, ja jos $F : \Omega \to D$ on aito holomorfinen kuvaus, tällöin $F^{-1}(y_0)$ on joukon Ω kompakti analyyttinen alivaristo jokaiselle pisteelle $y_0 \in D$. Nämä lauseet määrittelevät aidot holomorfiset kuvaukset. [1]

Määritelmät perustuvat aidon kuvauksen lauseeseen ja kuvausten holomorfisuuteen. Aidon kuvauksen lause määrittelee aidon kuvauksen siten, että jos kuvauksen alkukuva jokaisesta maalijoukkonsa kompaktista osajoukosta on kompakti, kuvaus on aito. [3]

Kuvaus avaruuden $\mathbf{C}^n$ osajoukkojen välillä, $f : \Omega_1 \to \Omega_2$, on biholomorfinen, jos $f = (f_1, \ldots, f_n)$, jos se on yksi yhteen kuvaus ja jos sillä on holomorfinen käänteiskuvaus. Biholomorfinen kuvaus on aito kuvaus, sillä sen käänteiskuvaus on jatkuva. [48]

Aidossa kuvauksessa alivariston kuva on maalijoukon alivaristo. Kompleksinen varisto tarkoittaa kompleksisten polynomiyhtälöiden joukon ratkaisujoukkoa. Kompleksianalyyttinen alivaristo on lokaalisti isomorfinen joukko jonkin sellaisen joukon kanssa, joka on nollakohtien joukko jollekin äärelliselle joukolle holomorfisia funkitoita.

Holomorfisuus tarkoittaa kuvauksen kompleksista analyyttisyyttä, kompleksista differentioituvuutta sekä sitä, että kuvaus toteuttaa Cauchy-Riemannin yhtälöt. Funktio f on holomorfinen avaruuden $\mathbf{C}^n$ avoimessa joukossa Ω, jos sille pätee $f : \Omega \to \mathbf{C}$, $f \in C^1(\Omega)$, ja jos se toteuttaa Cauchy-Riemannin yhtälöt $\overline{\partial}_j f = \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} = 0$ jokaiselle $j = 1, \ldots, n$. Kuvaus $F = (f_1, \ldots, f_m) : \Omega \to \mathbf{C}^m$ on holomorfinen joukossa Ω, jos funktiot f_k ovat holomorfisia jokaisella $k = 1, \ldots, m$. [5]

Aito kuvaus voidaan määritellä myös seuraavasti: Kuvaus $F : \Omega \to D$ on aito jos ja vain jos F kuvaa reunan $\partial\Omega$ reunalle ∂D seuraavalla tavalla:

$$\text{jos } \{z_j\} \subset \Omega \quad \text{on jono, jolle } \lim_{j\to\infty} d(z_j, \partial\Omega) = 0, \text{ niin } \lim_{j\to\infty} d(F(z_j), \partial D) = 0.$$

Tämän määritelmän perusteella kuvausten $F : \Omega \to D$ tutkiminen johtaa geometriseen funktioteoriaan kuvauksista, jotka kuvaavat joukon $\partial\Omega$ joukolle ∂D. Käy ilmi, että aidot holomorfiset kuvaukset laajenevat jatkuvasti määrittelyalueittensa reunoille.

Aitojen holomorfisten kuvausten tutkimisessa yksi kiinnostuksen kohde on kuvauksen Jakobin determinantin nollajoukko, siis niiden kuvauksen määrittelyjoukon pisteiden joukko, jossa Jakobin determinantti saa arvon nolla. Jos tämän joukon ottaa pois kuvauksen määrittelyjoukosta, aito holomorfinen kuvaus on jokaisen pisteen ympäristössä lokaali diffeomorfismi, siis isomorfismi joukkojen välillä. [1]

Holomorfisten kuvausten tutkiminen liittyy osaltaan Dirichlet-ongelmien ratkaisemiseen. Klassisessa Dirichlet-ongelmassa etsitään joukon $\partial\Omega \subset \mathbf{R}^m$ jatkuvalle funktiolle f reaaliarvoista funktiota, joka on joukossa Ω harmoninen ja joukon Ω sulkeumassa $\overline{\Omega}$ jatkuva ja jonka rajoittuma joukon reunalle $\partial\Omega$ on kyseinen funktio f. [8]

Tässä tutkielmassa käydään läpi määritelmiä ja käsitteitä, joista aidot holomorfiset kuvaukset muodostuvat, sekä avataan matemaattista struktuuria, joka on näiden käsitteiden taustalla.

Tutkielmassa todistetaan muiden muassa seuraavat ominaisuudet:

Avaruuden $\mathbf{C}^n$ aidossa holomorfisessa kuvauksessa $F : \Omega \to \Omega'$ jokaiselle pisteelle $w \in \Omega'$ joukko $F^{-1}(w)$ on äärellinen joukko pisteitä. Todistus perustuu kuvauksen analyyttisyyteen, Taylorin sarjaesityksen suppenemiseen, alueen karakterisaatioon, nollajoukkojen diskreettisyyteen, todistukseen, että jokainen kompakti avaruuden $\mathbf{C}^n$ alivaristo on äärellinen joukko pisteitä.

Kuvaus F kuten edellä ei voi pienentää dimensiota.

F on suljettu ja avoin kuvaus. Todistus perustuu todistukseen, että kuvauksen normaalit arvot muodostavat avoimen joukon. Todistuksissa käytetään Hausdorffin mittaa, Lipschitz-ehtoa, joka perustuu euklidiseen metriikkaan. Näiden lisäksi käytetään metrisiä avaruuksia, niiden täydellisyyttä, joukon tiheyden käsitettä ja yhtenäisyyden käsitettä. Näiden avulla saadaan tulos, jonka mukaan kuvauksen F normaalit arvot muodostavat yhtenäisen avoimen joukon, joka on tiheä kuvauksen maaliavaruudessa Ω'. Koska F on holomorfinen, $F^{-1}(w)$ on kompakti joukko jokaiselle $w \in \mathbf{C}^n$, jokainen joukon Ω pisteen ympäristö sisältää yhtenäisen pisteen ympäristön D, jolle F:n rajoittuma $D \to F(D)$ on aito kuvaus. Tämän kautta selviää, että F on avoin kuvaus.

Kuvaukselle F on olemassa multiplisiteetti, joka tarkoittaa kokonaislukua m, jolle jokaiselle kuvauksen kuvajoukon normaalille arvolle w pätee, että joukon $F^{-1}(w)$ alkioiden lukumäärä on m ja kuvauksen kuvajoukon kriittiselle arvolle pätee, että joukon $F^{-1}(w)$ alkioiden lukumäärä on pienempää kuin m. Todistuksessa käytetään käänteiskuvauslausetta ja kuvauksen kääntyvyyttä, kuvauksen aitoutta ja kuvauksen rajoittuman aitoutta kuten edellisen lauseen todistuksessakin, joukkojen yhtenäisyyttä, tiheyttä, lausetta jonka mukaan holomorfisella ja injektiivisellä kuvauksella kuvauksen jakobiaanilla ei ole nollakohtaa, näin ollen todistus juontuu aidon holomorfisen kuvauksen kääntyvyydestä.

Kuvauksen F kriittinen joukko on maalijoukon Ω' alivaristo, ja yleisemmin $F(V)$ on joukon Ω' alivaristo aina, kun V on joukon Ω alivaristo. Todistukseen käytetään käänteiskuvauslausetta ja Radón lausetta, joka antaa tuloksen kuvaukselle $F : \Omega \to \mathbf{C}$, joka on jatkuva joukossa Ω ja holomorfinen siinä avoimessa joukon Ω osajoukossa, jossa pätee $F(z) \neq 0$. Tälle kuvaukselle pätee, että kyseinen kuvaus F on holomorfinen joukossa Ω. Radón lauseen todistuksessa käytetään Poisson-integraalia, holomorfisen funktion harmonisuutta, joka perustuu Cauchy-Riemannin yhtälöihin, maksimiperiaatetta harmonisille funktioille, joka kertoo, että kyseinen harmoninen funktio, joka saa määrittelyjoukon reunalla negatiivisen arvon tai arvon nolla, on arvoltaan negatiivinen tai nolla joukon sisällä. Maksimiperiaatteen todistuksessa käytetään invarianttia Laplace-operaattoria ja sen ominaisuuksia. Todistuksessa käytetään vielä poistuvan joukon käsitettä, joka yhdistyy holomorfisen funktion laajenemiseen holomorfiseksi poistuvassa joukossa. Tätä käsitettä sovelletaan kuvauksen nollajoukkoon.

Tutkielmassa todistetaan lisäksi Henkinin lause, joka kertoo, että aito holomorfinen kuvaus laajenee jatkuvaksi kuvaukseksi määrittelyjoukkonsa reunalle silloin, kun määrittelyjoukko on pseudokonveksi. Sitä seuraa Henkinin lemma, joka kertoo edelleen, että aito holomorfinen kuvaus kahden pseudokonveksin joukon välillä kuvaa lähtöjoukkonsa jonon, joka suppenee epätangentiaalisesti kohti joukkonsa reunaa maalijoukon jonoksi, joka suppenee kohti maalijoukon reunaa. Lauseiden todistuksissa tarvitaan käsitteitä holomorfisuuden määrittelyalueista, pseudokonveksisuudesta, joiden määrittelyssä etsitään holomorfista funktiota, joka on määritelty kyseisessä joukossa, ja joka on holomorfinen kyseisen joukon ympäristössä. Tämän funktion olemassaolon todistuksessa käytetään funktion Laurent-sarjaa, jonka kertoimet määräytyvät Cauchyn integraalikaavan kautta ja erityisesti Laurent-sarjan suppenemista. Lisäksi tarvitaan Weierstrassin lausetta, jonka mukaan jono holomorfisia funktioita suppenee kohti saman määrittelyalueen funktiota, joka on holomorfinen. Pseudokonveksin joukon määrittelyssä käytetään plurisubharmonista funktiota. Jokainen harmoninen funktio on plurisubharmoninen. Lauseiden todistusta varten esitellään Carathéodoryn metriikka, joka määrittelee tangenttivektorin pituuden jokaisessa pisteessä. Käytetään myös erityisesti määritelty reunafunktio ja todetaan, että lauseen todistuksessa pseudokonveksi joukko sisältää C^{∞}-reunan. Henkinin lauseen todistuksessa käytetään Hopf'n lemmaa, joka antaa positiivisen arvon harmonisen, ei-vakioarvoisen funktion ulospäin suuntautuvalle yksikkönormaalille. Tämä kyseinen funktio saa maksimin (ei välttämättä aidon) määrittelyalueensa reunalla. Lisäksi käytetään Hardy-Littlewoodin lausetta, joka antaa avoimessa kiekossa säännölliselle ja suljetussa kiekossa jatkuvalle funktiolle, joka toteuttaa kiekkon kehällä Lipschitz-ehdon, arvion funktion derivaatan maksimiarvosta. Hardy-Littlewoodin lauseen todistuksessa käytetään funktion Poisson-integraalin raja-arvojen olemassaoloa. Henkinin lauseen todistuksessa käytetään lisäksi plurisubharmonisen funktion jatkuvuutta ja aidon kuvauksen multiplisiteettiä.

Henkinin lemman todistus käyttää Henkinin lausetta, kuvauksen pseudokonveksin maalijoukon määrittävän funktion plurisubharmonisuutta ja analyysin integrointivälineitä.

Tutkielma etenee seuraavasti:

Luvussa kaksi käydään läpi esimerkkejä aidoista holomorfisista kuvauksista. Luvussa kolme esitellään holomorfinen funktio ja holomorfinen kuvaus sekä osoitetaan, että sillä on määrittelyjoukkonsa pisteissä kohti kyseistä funktiota suppeneva Taylorin sarjaesitys. Tästä seuraa, että jokaista aitoa holomorfista kuvausta voidaan määrittelyjoukossaan approksimoida polynomeilla. Luvussa neljä käydään läpi aitojen holomorfisten kuvausten ominaisuuksia ja matemaattista struktuuria niiden takana. Osoitetaan muun muassa, että aito holomorfinen kuvaus kuvaa lähtöjoukkonsa alivariston maalijoukkonsa alivaristoksi. Tutkitaan kuvausten kääntyvyyttä. Käy ilmi, että $F^{-1}(w)$ on äärellinen jokaiselle aidon holomorfisen kuvauksen F normaalille ja kriittiselle arvolle. Luvussa viisi tutkitaan holomorfisuuden määrittelyalueita. Luvussa kuusi tutkitaan aitojen holomorfisten kuvausten reunakäyttäytymistä. Osoitetaan, että aito holomorfinen kuvaus laajenee jatkuvasti määrittelyalueensa reunalle. Osoitetaan myös, että aito holomorfinen kuvaus avaruuden $\mathbf{C}^n$ yksikköpallolta itselleen on automorfismi, struktuurin säilyttävä ja kääntyvä kuvaus. Luvussa seitsemän tutkitaan aitojen holomorfisten kuvausten haarautumista.

2 Esimerkkejä

Holomorfiset kuvaukset ovat kompleksianalyyttisiä kuvauksia, esimerkkeinä tason $\mathbf{C}$ jatkuvat kuvaukset z^2, $1+i$.

Avaruuden $\mathbf{C}^n$ kuvaus $F = (f_1, \ldots, f_n)$ on holomorfinen ja siten kompleksianalyyttinen, jos jokainen koordinaattikuvaus f_i $i = 1, \ldots, n$ on holomorfinen.

Aidot kuvaukset ovat esimerkiksi biholomorfisia kuvauksia, esimerkkinä identiteettikuvaus tason $\mathbf{C}$ yksikkökiekolta saman avaruuden yksikkökiekolle.

Tapaus, jossa aidot holomorfiset kuvaukset ovat parhaiten ymmärrettyjä, on kuvaus aidosti pseudokonveksien joukkojen välillä. [1]

Määritelmä. 1 ***Plurisubharmoninen funktio.*** *Olkoon Ω avaruuden $\mathbf{C}^n$ avoin osajoukko. Olkoon $u : \Omega \to [-\infty, \infty)$ ylhäältä puolijatkuva funktio, joka ei saa identtisesti arvoa $-\infty$ missään Ω:n yhtenäisessä komponentissa. Funktio u on plurisubharmoninen, jos jokaisella $a \in \Omega$ ja $b \in \mathbf{C}^n$ funktio $\lambda \mapsto u(a + \lambda b)$ on subharmoninen tai identtisesti $-\infty$ jokaisessa joukon $\{\lambda \in \mathbf{C} : a + \lambda b \in \Omega\}$ komponentissa. Tällöin merkitään $u \in PSH(\Omega)$.*

Määritelmä. 2 ***Subharmoninen funktio.*** *Olkoon Ω avaruuden $\mathbf{R}^m$ avoin osajoukko, ja olkoon $u : \Omega \to [-\infty, \infty)$ ylhäältä puolijatkuva funktio, joka ei saa identtisesti arvoa $-\infty$ missään joukon Ω yhtenäisessä komponentissa. Tällöin funktio u on subharmoninen joukossa Ω, jos jokaiselle joukon Ω relatiivisesti kompaktille osajoukolle G, siis joukolle jonka sulkeuma on kompakti, ja jokaiselle funktiolle $h \in H(G) \cap C(\overline{G})$ pätee*

$$u \leq h \, joukossa \; \partial G \Longrightarrow u \leq h \, joukossa \; G.$$

[6]

Avaruuden $\mathbf{C}^n$ osajoukko Ω on aidosti pseudokonveksi, jos se on muotoa $\Omega = \{z \in \mathbf{C}^n : g(z) < 0\}$, missä $g \in C^2$ joukon $\overline{\Omega}$ ympäristössä ja toteuttaa ehdot $d_z g \neq 0$ jokaiselle $x \in \partial\Omega$, kun merkitään $z = x + iy$, ja funktio g on aidosti plurisubharmoninen joukon $\partial\Omega$ ympäristössä. Näin määriteltyä funktiota g kutsutaan joukon Ω määrittäväksi funktioksi. [7] Useamman kompleksimuuttujan plurisubharmoninen funktio on vastine yhden kompleksimuuttujan subharmoniselle funktiolle. Funktio $v : \Omega \mapsto [-\infty, \infty)$ on subharmoninen joukossa Ω, jos sen jokaiselle avoimelle joukolle G, jonka sulkeuma on kompakti joukossa Ω ja jokaiselle funktiolle $u : \overline{G} \mapsto \mathbf{R}$, joka on harmoninen joukossa G ja jatkuva, pätee implikaatio

$$v \leq u \text{ rajalla } \partial G \Longrightarrow v \leq u \text{ joukossa } G.$$

[9]

Jos joukot Ω ja D ovat aidosti pseudokonvekseja, aito holomorfinen kuvaus niiden välillä on lokaalisti biholomorfinen. Biholomorfiset kuvaukset ovat eräs tapaus aidoista holomorfisista kuvauksista. Ne aidot holomorfiset kuvaukset, jotka eivät ole biholomorfisia, ovat haarautuvia kuvauksia, joilla on singulariteettipisteitä sileyden ja haarautumisen suhteen määrittelyjoukkojensa rajapinnoilla. [1]

Aidot holomorfiset kuvaukset joukolta joukolle itselleen silloin, kun joukko on pseudokonveksi, ovat automorfismeja, siis bijektiivisiä kuvauksia. Esimerkiksi aidot holomorfiset kuvaukset avaruuden $\mathbf{C}$ yksikkökiekolta $\triangle = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ itselleen ovat äärellisiä Blaschke-tuloja, siis kuvauksia $f : \triangle \to \triangle$, missä

$$f(z) = e^{i\phi} \prod_{j=1}^{k} \frac{z - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha}_j z},$$

missä $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \triangle$ ja $\phi \in \mathbf{R}$.

Aidot holomorfiset kuvaukset avaruuden $\mathbf{C}^n$ polykiekolta $\triangle = \triangle \times \cdots \times \triangle$ itselleen määräytyvät seuraavasti: Jos joukot $\Omega_1, \ldots, \Omega_n, D_1, \ldots, D_n \subset \mathbf{C}^n$ ovat rajoitettuja, ja jos $F : \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n \to D_1 \times \cdots \times D_n$ on aito holomorfinen kuvaus, tällöin on olemassa $\{1, \ldots, n\}$:n permutaatio σ ja aidot holomorfiset $f_j : \Omega_{\sigma(j)} \to D_j$ siten, että

$$F(z_1, \ldots, z_n) = (f_1(z_{\sigma(1)}), \ldots f_n(z_{\sigma(n)})).$$

Toisaalta kuvaus kahden eri pseudokonveksin joukon välillä ei välttämättä ole biholomorfismi. Esimerkkinä tästä avaruuden $\mathbf{C}^2$ joukoille D_1 ja D_2, jotka eivät ole yhdesti yhtenäisiä, kun

$$D_1 = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2 \,:\, |z|^4 + \frac{1}{|z|^4} + |w|^2 < 3\},$$
$$D_2 = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2 \,:\, |z|^2 + \frac{1}{|z|^2} + |w|^2 < 3\},$$

ja kuvaus $F : D_1 \to D_2$, $F(z, w) = (z^2, w)$, joka kuvaa kaksi alkiota yhdelle kahden pseudokonveksin joukon välillä.

Aito holomorfinen kuvaus avaruuden $\mathbf{C}^n$, missä $n > 1$, yksikköpallolta itselleen on puolestaan välttämättä automorfismi. [13]

Jatkuva kuvaus kompleksiavaruuden suljetulta ja rajoitetulta joukolta (näin ollen kompaktilta joukolta) metriseen avaruuteen, kuten kompleksitaso, on aito kuvaus.

3 Holomorfiset kuvaukset

3.1 Holomorfinen funktio

Määritelmä. 3 *Olkoon $\Omega \in \mathbf{C}$. Funktio $f : \Omega \to \mathbf{C}$ on holomorfinen, jos*

i) f on kompleksisesti differentioituva: $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ on olemassa ja

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Tällöin f:llä on ominaisuudet:
ii) f voidaan lokaalisti esittää suppenevana potenssisarjana.
iii) Jokaiselle suljetulle polulle γ yhdesti yhtenäisessä alueessa Ω pätee (Cauchyn integraalilause yhdesti yhtenäisille poluille)

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Seuraava on kohdan i) vaihtoehtoinen määritelmä ja pätee holomorfiselle f: iv) f:llä on osittaisderivaatat muuttujien x ja y suhteen jokaisessa alueen Ω pisteessä, ja ne toteuttavat Cauchy-Riemannin ehdot

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0.$$

Avaruuden $\mathbf{C}^n$ funktio f on holomorfinen kuvaus määrittelyjoukostaan $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ kompleksitasoon $\mathbf{C}$. [14]

n-ulotteisessa avaruudessa $\mathbf{C}^n$ Cauchy-Riemannin yhtälöt, ja siten myös holomorfisuuden määritelmä, saa seuraavan muodon:

Merkintä. 1 *Merkintä $H(\Omega)$ tarkoittaa holomorfisten funktioiden joukkoa, joiden määrittelyalue on joukko $\Omega \subset \mathbf{C}^n$.*

Lause. 1 ***Cauchy-Riemannin yhtälöt.*** *Olkoon $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ avoin osajoukko. Tällöin $C^1(\Omega)$ on niiden kompleksiarvoisten funktioiden luokka, joiden määrittelyjoukkona on Ω ja joiden osittaisderivaatat $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ ja $\dfrac{\partial f}{\partial y_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ ovat jatkuvia joukossa Ω.*

Tällöin $f \in H(\Omega)$ jos ja vain jos Cauchy-Riemannin yhtälöt

$$\overline{D}_j f = 0, \quad (1 \leq j \leq n) \tag{1}$$

pätevät, missä $\overline{D}_j = \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_j}$, ja $\overline{z}_j$ on pisteen z_j kompleksikonjugaatti. [16]

Seuraavaksi käsitellään Cauchyn integraalikaavaa n-ulotteisessa avaruudessa.

3.2 Cauchyn integraalikaava polykiekossa

Määritelmä. 4 *Olkoon $a \in \mathbf{C}^n$ ja $q = (q_1, \ldots, q_n)$ n-monikko positiivisia lukuja. Polykiekko $P(a;q)$ on joukko kaikista pisteistä $z \in \mathbf{C}^n$, joiden koordinaateille z_i pätee $|z_i - a_i| < q_i$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Polykiekko avaruudessa $\mathbf{C}^n$ on karteesinen tulo n kappaleesta kompleksitason $\mathbf{C}$ kiekkoja. Toisin sanoen*

$$P(a;q) = P^n(a;q) = \{z \in \mathbf{C}^n; |z_j - a_j| < q_j,\ 1 \leq j \leq n\}.$$

Cauchyn integraalikaavan mukaan jokainen jatkuva funktio avoimen kiekon $D \subset \mathbf{C}$ topologisella reunalla $\partial D \subset \mathbf{C}$ määrittelee yksikäsitteisen holomorfisen funktion alueessa $\overline{D}$. Tämän teorian yleistyksessä polykiekolle $P = P^n$, kun $n \geq 2$, riittää määritellä funktio f, joka on määritelty ja jatkuva polykiekon topologisen reunan aidossa osajoukossa, jota kutsutaan P:n erityiseksi reunaksi:

$$T^n(a;q) = \{z \in \mathbf{C}^n ; |z_j - a_j| = q_j,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Jos $S \subset \mathbf{C}^n$, funktio $f : S \to \mathbf{C}$ on holomorfinen, jos f on holomorfisen funktion rajoittuma, joka on määritelty lähellä joukkoa S (toisin sanoen f on holomorfinen jossain joukon S ympäristössä). Cauchyn integraalikaavan yleistämiseksi polykiekolle P^n tarvitaan Fubinin lausetta, joka löytyy teoksesta [27].

Määritelmä. 5 *Olkoon $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ avoin joukko, $f : \Omega \to \mathbf{C}$, $\Omega \subset \mathbf{C}^n$, luku $n \in \mathbf{N}$ mielivaltainen. Funktio f on osittain holomorfinen, jos jokaiselle kiinnitetylle $(z_1^0, \ldots, z_n^0)$ ja jokaiselle $j = 1, \ldots, n$ yhden muuttujan funktio*

$$z_j \mapsto f(z_j^0, \ldots, z_{j-1}^0, z_j, z_{j+1}^0, \ldots, z_n^0)$$

on holomorfinen. Jatkuva osittain holomorfinen funktio on holomorfinen.

Lause. 2 ***Cauchyn integraalikaava.*** *Jos f on jatkuva funktio, joka on määritelty joukossa $T = T^n(a;q)$, lauseke*

$$\begin{aligned} h(z) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_T \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^1}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{|\xi_n - a_n| = q_n} \cdots \int_{|\xi_1 - a_1| = q_1} \frac{f(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{(\xi_1 - z_1)\cdots(\xi_n - z_n)}\,\mathrm{d}\xi_1 \ldots d\xi_n, \end{aligned}$$

missä $(\xi - z)^1 = (\xi_1 - z_1)\cdots(\xi_n - z_n)$,

määrittelee holomorfisen funktion h polykiekossa $P = P(a;q)$. Jos f voidaan laajentaa holomorfisesti joukkoon $\overline{P}$, niin $f|_P = h$.

Todistus. Todistetaan ensin lauseen ensimmäinen väite, että funktio h on holomorfinen joukossa P. Funktio h on jatkuva, sillä funktio $(\xi, z) \mapsto \dfrac{f(\xi)}{(\xi - z)^1}$ on jatkuva joukossa $T \times P$. f on oletuksen mukaan jatkuva joukossa T, ja jakaja $(\xi - z)$ ei saa arvoa nolla, kun muuttuja $\xi \in T$ ja muuttuja $z \in P$. Fubinin lauseen mukaan moniulotteisen integraalin arvo ei riipu integroinnin järjestyksestä. Siten jokaiselle kutistuvalle paloittain sileälle polulle γ_j, joka riippuu vain muuttujasta z_j, yksiulotteinen Cauchyn lause antaa tuloksen $\displaystyle\int_{\gamma_j} h\,\mathrm{d}z_j = 0$.

Lause. 3 *Olkoon $f \in H(\Omega)$ ja F' jatkuva joukossa Ω. Tällöin*

$$\int_\gamma F'(z) = 0$$

jokaiselle suljetulle Ω:n polulle γ. [28]

Määritelmän 5 perusteella h on holomorfinen. Todistetaan sitten, että $h(Z)$ on holomorfisen funktion rajoittuma joukkoon P: Olkoon f holomorfinen $\overline{P}$:n lähellä. Osoitetaan, että $f|_P = h$ käyttämällä induktiota. Lähdetään liikkeelle yksiulotteisesta teoriasta.

"$n-1 \to n$": Olkoon $(z_1, \ldots, z_n)$ kiinnitetty ja $F(\xi) = f(z_1, \ldots, z_{n-1}, \xi)$. Näille pätee Cauchyn integraalikaavan yksiulotteisen version mukaan

$$F(z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi_n - a_n| = q_n} \frac{F(\xi)}{\xi_n - z_n} \, \mathrm{d}\xi_n. \tag{2}$$

Jos ξ on kiinnitetty ja $z_1, \ldots, z_n$ ovat muuttujia, induktio-oletuksesta (2) seuraa, että

$$\begin{aligned} & f(z_1, \ldots, z_{n-1}, \xi) \\ & = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{|\xi_{n-1} - a_{n-1}| = q_{n-1}} \cdots \int_{|\xi_1 - a_1| = q_1} \frac{f(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n) \, \mathrm{d}\xi_1 \cdots \mathrm{d}\xi_{n-1}}{(\xi_1 - z_1) \cdots (\xi_{n-1} - z_{n-1})} \end{aligned}$$

Väite seuraa sijoittamalla tämä yhtälöön (2), jolloin $F(z_n) = h$ on funktion f rajoittuma joukkoon P.

Todistuksesta käy ilmi, että Cauchyn integraalikaava (2) on voimassa tulojoukoille $\overline{D}_1 \times \ldots \times \overline{D}_n$ $\overline{P}$:n sijaan, jos yksiulotteinen Cauchyn integraalilause on voimassa jokaisessa $\overline{D}_j$. Identiteettiin $f|_P = h$ riittää, että f on jatkuva $\overline{P(a;q)}$:ssa ja holomorfinen $P(a;q)$:ssa.

3.3 Taylorin sarja polykiekossa

Johdetaan seuraavaksi tulos, jonka mukaan avoimessa polykiekossa P määritelty holomorfinen funktio voidaan esittää Taylorin polynomina, joka suppenee joukossa $H(P)$, kohti holomorfista funktiota polykiekossa P. Johtamiseen tarvitaan muun muassa käsite multi-indekseistä:

Merkintä. 2 *Kutsutaan multi-indeksiksi $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbf{N}^n$, jolle*

$$|v| = \sum_{j=1}^{n} v_j; \; v! = v_1! \cdot \ldots \cdot v_n!; \; z^v = z_1^{v_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{v_n}; \; v + 1 = (v_1 + 1, \ldots, v_n + 1).$$

Jos $f : \Omega \to \mathbf{C}$ on $|v|$-kertaisesti osittain differentioituva funktio, niin merkitään

$$D^v f = \frac{\partial^{|v|} f}{\partial z_1^{v_1} \ldots \partial z_n^{v_n}} : \Omega \to \mathbf{C}. \tag{3}$$

Korollaari. 1 *Jokaiselle multikertoimelle v, D^v on jatkuva kuvaus $H(\Omega) \to H(\Omega)$. Jokaiselle polykiekolle $P = P^n(a;q) \subset_{avoin} X$, jolla on erityinen raja T, ja jokaiselle X:n holomorfiselle funktiolle f pätee:*
i)

$$D^v f(z) = \frac{v!}{(2\pi i)^n} \int_T \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{v+1}} \, \mathrm{d}\xi, \; \textit{kun } z \in P$$

ii)
$$|D^v f(a)| \leq \frac{v!}{q^v}\|f\|_T$$
(Cauchyn estimaatti)
iii) Kiinteillä $w \in P$ ja $m \in \mathbf{N}$, jos jokaiselle $z \in P$ Ω sisältää suljetun kompleksisen segmentin
$$\{(1-\lambda)w + \lambda z; \lambda \in \overline{P^1(1)}\},$$
(missä merkintä $P^1(1)$ tarkoittaa yksiulotteista kiekkoa, jonka säde on yksi), niin
$$\sup_{z\in\overline{P}}\left|\sum_{|v|=m}\frac{1}{v!}D^v f(w)(z-w)^v\right| \leq \|f\|_\Omega.$$

Seuraava lause seuraa funktion D^v jatkuvuudesta:

Lause. 4 ***Weierstrassin lause.*** *Jos jono $(f_j) \in H(\Omega)$ suppenee kohti funktiota f, silloin*
$$(D^v f_j)(z) = \frac{v!}{(2\pi i)^n}\int_T \frac{f_j(\xi)}{(\xi - z)^{v+1}}\,\mathrm{d}\xi, \textit{ kun } z \in P$$
suppenee $H(\Omega)$:ssa kohti funktiota $D^v f$ jokaisella $v \in \mathbf{N}^n$.

Esitetään seuraavaksi todistus korollaarille 1:
Todistus. Jatkuvalla funktiolla $\dfrac{f(\xi)}{(\xi - z)^1}$ on jatkuvat ensimmäisen kertaluvun derivaatat muuttujien z ja $\overline{z}$ suhteen, joten differentaatio voidaan tehdä Cauchyn integraalikaavassa integraalin sisällä. Näin ollen integraali korollaarin (1) kohdassa i) on osittain holomorfinen ja jatkuva. Kun $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $D^v = D^{v_1}\cdots D^{v_n}$, joten i) seuraa induktiolla v:n suhteen, ja voidaan päätellä, että D^v on jatkuva kuvaus $H(\Omega) \mapsto H(\Omega)$. Voidaan huomioida, että D^v on derivaattaoperaattori, jota sovelletaan korollaarin kohdassa i) Cauchyn integraalikaavan antamaan esitykseen funktiolle f pisteessä z. Integraalikaavaa derivoidaan multi-indeksin $|v|$ edellyttämä määrä, jolloin kohta i) seuraa. Cauchyn integraalikaavan voimassaolo todettiin edellä (2) pisteille $z \in P$. Kohta ii) seuraa tiedosta
$$\int_T \mathrm{d}\xi = \prod_{k=1}^n 2\pi q_k = (2\pi)^n q^1,$$
sillä
$$|(D^v f)(a)| \leq_{i)} \frac{v!}{(2\pi)^n}\frac{\|f\|_T}{q^{v+1}}\left|\int_T \mathrm{d}\xi\right| = \frac{v!}{q^v}\|f\|_T.$$
Kohta iii): Kiinnitetään $w \in P$ ja määritellään polynomi
$$P_m(z) = \sum_{|v|=m}\frac{1}{v!}D^v f(w)z^v.$$

Kiinnitetään $z \in P$. Oletuksen mukaan, tällöin

$$V = \{\lambda \in \mathbf{C}; (1-\lambda)w + \lambda z \in \Omega\}$$

on $\overline{P^1(1)}$:n avoin ympäristö $\mathbf{C}$:ssa. Funktio

$$g : V \to \mathbf{C},\ \lambda \mapsto f(\lambda z + (1-\lambda)w)$$

on holomorfinen. Derivaatan ketjusäännön avulla

$$\frac{d^m g}{d\lambda^m}(0) = \sum_{|v|=m} \frac{m!}{v!} D^n f(w)(z-w)^v = m! P_m(z-w).$$

Tässä derivointi on suoritettu funktiolle $\lambda \mapsto f(\lambda x + (1-\lambda)w)$ muuttujan λ suhteen, ja sijoitettu $\lambda = 0$. Summa lasketaan koordinaattien yli, vektoreiden sisätulona. Yksiulotteinen Cauchyn estimaatti g:lle ja epäyhtälö

$$|P_m(z-w)| = \frac{1}{m!}\left|\frac{d^m g}{d\lambda^m}(0)\right| \leq \sup_{|\lambda|=1} |g(\lambda)| \leq \|f\|_\Omega$$

takaavat väitteen iii). D^v:n jatkuvuus jää tässä osoittamatta[1].

Todetaan, että funktio on holomorfinen jos ja vain jos se voidaan esittää lokaalisti Taylorin sarjana. Todistus tästä teoksessa [15].

Suppenevat potenssisarjat määrittelevät jatkuvat holomorfiset funktiot. Tosiasiassa käänteinen pätee myös:

Korollaari. 2 ***Taylorin sarja.*** *Jos f on holomorfinen polykiekossa $P = P(a;q)$, f:n Taylorin sarja*

$$\sum_{v \in \mathbf{N}^n} \frac{1}{v!} D^v f(a)(z-a)^v \tag{4}$$

suppenee $H(P)$:ssa kohti funktiota f.

Todistus. Yleisyyttä menettämättä asetetaan $a = 0$. Yleisyyttä ei menetetä, sillä samalla lailla voidaan myös tarkastella funktiota $z \mapsto f(z+a)$. Sarja

$$\sum_{v \in \mathbf{N}^n} \frac{1}{v!} D^v f(0)(z-0)^v$$

suppenee $H(P)$:ssa. Jokaiselle $z \in P$ joukko

$$\{\frac{1}{v!} D^v f(0) z^v; v \in \mathbf{N}^n\}$$

on rajoitettu korollaarin 1 kohdan ii) nojalla, sillä $\|f\|_{T(0;z)}$ on äärellinen. Sarja suppenee $P(z)$:ssa Abelin lauseen, joka löytyy teoksesta [15], ja apulauseen

[1] D^v:n jatkuvuus seuraa lemmasta, jonka mukaan kahden topologisen vektoriavaruuden, joiden topologiat muodostuvat seminormien perheestä, seminormeina p_i ja q_j, välinen kuvaus φ on jatkuva, jos jokaiselle q_j on olemassa $r \in \mathbf{R}$ ja p_i siten, että $q_j \circ \varphi \leq r p_i$.

Lemma. 1 *Olkoon $\mathscr{U} = (U_k)_{k\in I}$ Ω:n avoin peite. Jono (f_j) suppenee $H(\Omega)$:ssa (kohti funktiota $f \in H(\Omega)$) jos ja vain jos jono $(f_j|_{U_k})$ suppenee $H(U_k)$:ssa jokaisella k.*

nojalla.

Taylorin sarjaesitys funktiolle f: $T = T(a;q)$:ssa saadaan

$$f(z) =_{Cauchy} \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_T \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^1}\,\mathrm{d}\xi =_* \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_T f(\xi)\left(\sum_{v\in\mathbf{N}^n}\frac{z^v}{\xi^{v+1}}\right)\mathrm{d}\xi$$
$$= \sum_{v\in\mathbf{N}^n}\left[\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_T \frac{f(\xi)}{\xi^{v+1}}\,\mathrm{d}\xi\right] z^v =_{korollaari(1)i)} \sum_{v\in\mathbf{N}^n}\frac{1}{v!}D^v f(0) z^v.$$

Kohdassa * on käytetty geometrisen sarjan summakaavaa n-ulotteisessa avaruudessa tuloon $(\frac{1}{(\xi - z)})^1$.

Lemma. 2 ***Geometrinen sarja.*** *$\sum_{v\in\mathscr{N}^n}|z^v|$ suppenee $\mathscr{C}(P^n(1))$:ssa, ja $\sum_{v\in\mathscr{N}^n} z^v = \prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-z_j}$ suppenee $H(P^n(1))$:ssa. [15]*

Määritellään seuraavaksi holomorfinen kuvaus avaruudesta $\mathbf{C}^n$ avaruuteen $\mathbf{C}^m$:

Määritelmä. 6 ***Holomorfinen kuvaus.*** *Olkoon $\Omega' \subset \mathbf{C}^m$ avaruuden $\mathbf{C}^m$ avoin joukko. Kuvaus $F = (f_1, \ldots, f_n) : \Omega \to \Omega'$ on holomorfinen, jos sen jokainen komponenttifunktio f_k on holomorfinen.*

Jos lisäksi F on bijektiivinen ja $F^{-1} : \Omega' \to \Omega$ on holomorfinen, F on biholomorfinen kuvaus, ja Ω ja Ω' ovat biholomorfisesti ekvivalentit. Merkitään holomorfisia kuvauksia joukolta Ω joukolle Ω' $Hol(\Omega, \Omega')$.

Erityisesti $Hol(\Omega, \mathbf{C}) = H(\Omega)$.

Lause. 5 *Jos F on holomorfinen joukossa $\Omega = \{z : |z| < r\}$, niin*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(0)\frac{z^n}{n!},$$

joka suppenee tasaisesti jokaisessa Ω:n kompaktissa osajoukossa.

Kertoimet $F^{(n)}(0)$ määräytyvät kaavasta korollaari 1 kohta i), missä $z = 0$ ja $v = n$. Lauseesta 5 seuraa, että kuvausta, joka on holomorfinen ja siten analyyttinen jossain polykiekossa, voidaan approksimoida polykiekon pisteen z ympäristössä polynomeilla missä tahansa pienemmässä kiekossa. Erityisesti, jokainen koko määrittelyjoukossaan holomorfinen kuvaus, joka on holomorfinen koko määrittelyavaruudessaan, voidaan approksimoida polynomeilla jokaisessa kompaktissa joukossa. [2]

Määritelmä. 7 ***Säännöllinen kuvaus. Aito kuvaus.*** *Olkoon Ω kompleksinen analyyttinen joukko, jonka dimensio on n. Jokainen $F = (f_1, \cdots, f_N) \in H(\Omega)^N$ määrittelee kompleksisesti analyyttisen kuvauksen*

$$z \mapsto (f_1(z), \cdots, f_N(z)) \in \mathbf{C}^N,$$

missä $z \in \Omega$. Kuvaus F on säännöllinen, jos sen aste on n jokaisessa joukon Ω pisteessä. Jos jokaisen kompaktin avaruuden $\mathbf{C}^N$ osajoukon alkukuva kuvauksessa F on kompakti, F on aito kuvaus.

Kuvauksen säännöllisyys tarkoittaa sitä, että pisteessä $z = (z_1, \ldots, z_n)$ kuvauksen Jakobin matriisin $(\dfrac{\partial f_i}{\partial z_j})$, missä $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, n$ aste on n jokaiselle pisteelle z. Jokaisen aidon kuvauksen kuva on suljettu, sillä jokainen kompakti joukko kuvautuu kompaktiksi joukoksi. Jos kuvaus on lisäksi säännöllinen ja injektio, sen kuvajoukko on avaruuden $\mathbf{C}^N$ analyyttinen osajoukko. [3]

4 Aidot holomorfiset kuvaukset: ominaisuuksia

Merkintä. 3 *Merkitään $\Delta = \Delta' \times \Delta_n$, missä Δ' on polykiekko avaruudessa $\mathbf{C}^{n-1}$ ja Δ_n on kiekko kompleksitasossa $\mathbf{C}$. Näin ollen Δ on polykiekko avaruudessa $\mathbf{C}^n$.*

Merkintä. 4 *Merkitään $Z(f)$ kuvauksen f nollavaristo, eli niiden f:n määrittelyjoukon pisteiden muodostama joukko, joissa f saa arvon nolla.*

Määritelmä. 8 ***Alivaristo.*** *Olkoon $\Omega \subset_{avoin} \mathbf{C}^n$. Joukko V on Ω:n alivaristo, jos*
a) V on suljettu Ω:ssa tai relatiivisesti suljettu Ω:ssa, mikä tarkoittaa, että sen leikkaus joukon Ω kanssa on suljettu joukossa Ω, ja
b) jokaisella pisteellä $p \in \Omega$ on ympäristö $N(p)$, jolle

$$V \cap N(p) = Z(f_1) \cap \cdots \cap Z(f_r)$$

joillekin

$$f_1, \ldots, f_r \in H(N(p)).$$

Merkitään symbolilla π avaruuden $\mathbf{C}^n$ projektiota avaruudelle $\mathbf{C}^{n-1}$, joka määritellään kaavalla $\pi(z', z_n) = z'$, missä $n > 1$, $z = (z', z_n)$. Erityisesti $\pi(\Delta) = \Delta'$.

Olkoon $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ ja $\Omega' \subset \mathbf{C}^k$ alueita ja olkoon $F : \Omega \to \Omega'$ holomorfinen ja aito. Jos $w = (w_1, \ldots, w_k) \in \boldsymbol{\Omega}'$, niin $F^{-1}(w)$ on Ω:n alivaristo, sillä se on leikkaus kuvauksen $f_i - w_i$ nollajoukoista, missä f_i on F:n i:s komponentti. Joukko $F^{-1}(w)$ on kompakti, sillä F on aito. Seuraavassa todistetaan lause 10, joka kertoo että jokainen kompakti avaruuden $\mathbf{C}^n$ alivaristo on äärellinen joukko pisteitä. Tästä seuraa tulos, jonka mukaan $F^{-1}(w)$ on äärellinen joukko.

4.1 Jokaiselle pisteelle $w \in \Omega'$ joukko $F^{-1}(w)$ on äärellinen

Todistetaan ensin, että yhden muuttujan funktion nollakohdat ovat diskreettejä pisteitä, sen jälkeen käydään läpi "m-kertaluvun nollakohdat". Tämän jälkeen todistetaan projektiolause alivaristoille ja lopuksi todistetaan, että jokainen kompakti avaruuden $\mathbf{C}^n$ alivaristo on äärellinen joukko pisteitä. Alaluvun väite muodostuu näiden seurauksena.

Esitetään seuraavaksi todistus sille, että yhden muuttujan, ei-vakion, kompleksiarvoisen funktion $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ nollakohdat muodostavat $\mathbf{C}$:n diskreetin osajoukon. Kootaan aluksi aputuloksia.

Määritelmä. 9 ***Alueen karakterisaatio.*** *Epätyhjä osajoukko $X \subset \mathbf{C}$ on yhtenäinen, jos ja vain jos sitä ei voi kirjoittaa yhdisteenä kahdesta epätyhjästä, avoimesta joukosta, jotka ovat keskenään erillisiä. Näin ollen, jos X on alue ja $X = A \cup B$, missä A ja B ovat avoimia ja erillisiä, silloin, joko $A = \emptyset$ tai $B = \emptyset$.*

Lause. 6 *Olkoon $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, analyyttinen alueessa $X \subset \mathbf{C}$, joka sisältää pisteen z_0, jolle $f(z_0) = 0$. Tällöin vain toinen seuraavista pätee:*
i) f on identtisesti nolla z_0:n ympäristössä,
ii) z_0 on f:n diskreetti nollakohta.

Lauseen todistus perustuu funktion f yksiulotteisen Taylorin sarjaesityksen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \ |z - z_0| < R,$$

suppenemiseen avoimessa z_0-keskisessä kiekossa, jonka säde R sisältyy alueeseen, jossa f on analyyttinen. Esitys sarjan suppenemisesta teoksessa [34].

Lause. 7 *Analyyttisen funktion $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, joka ei ole identtisesti nolla, nollakohdat ovat diskreettejä pisteitä.*

Todistus. Olkoon f analyyttinen funktio $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, ja $X \in \mathbf{C}$. Määritellään osajoukot

$$X_0 = \{z \in X : \ f(z) = 0 \,\text{ja}\ z \text{ ei ole diskreetti}\},$$
$$X_1 = \{z \in X : \ f(z) \neq 0\} \cup \{z \in X : \ f(z) = 0 \,\text{ja}\ z \text{ on diskreetti}\}.$$

Tällöin X_0 ja X_1 ovat erilliset joukot, joiden yhdiste on X. Näytetään, että X_0 ja X_1 ovat avoimia, mistä seuraa seuraavan lauseen perusteella, alueen X yhtenäisyyden perusteella, että joko $X_0 = X$ tai $X_1 = X$.

Jos nyt $X = X_0$, tällöin jokainen X:n piste on f:n nollakohta, jolloin f katoaa kaikkialla X:ssa. Jos $X = X_1$, jokainen X:n piste on joko nollakohta tai f:n diskreetti nollakohta. Tällöin kaikki f:n nollakohdat ovat diskreettejä. Jos $w \in X_0$, käytetään lauseen 6 kohtaa ii).

Jos siis $w \in X_0$, kohta ii) ei päde. Lauseen 6 perusteella kohta i) pätee, ja näin ollen f häviää identtisesti jossain ympäristössä $B_r(w)$. Koska kaikki

$B_r(w)$:n sisältämät pisteet eivät ole keskenään diskreettejä nollakohtia, $B_r(w)$ sisältyy joukkoon X_0. Tämä osoittaa, että X_0 on avoin tässä tapauksessa.

Nyt olkoon $w \in X_1$. Jos $f(w) \neq 0$, on olemassa w:n ympäristö, jossa f ei häviä. Tämä ympäristö sisältyy joukkoon X_1. Jos $f(w) = 0$ ja w on diskreetti nollakohta, lause 7 takaa, että pisteellä w on olemassa ympäristö $B_d(w)$, jossa funktiolla f ei ole nollakohtia lukuunottamatta diskreettiä nollakohtaa w. Tämä ympäristö sisältyy myös joukkoon X_1, sillä $B'_d(w) = B_d(w) \backslash \{w\}$ sisältyy joukkoon $\{z \in X : f(z) \neq 0\}$. Avoimuuden määritelmän perusteella, joukko X_1 on avoin. [35]

Esitetään seuraavaksi mitä tarkoittaa "m kertaluvun nollakohta" funktiolle, joka saa arvon $f(z_0) = 0$:

Määritelmä. 10 *Olkoon X alue $\mathbf{C}$:ssa, f analyyttinen ja $z_0 \in X$. Olkoon $m \geq 1$ kokonaisluku. z_0 on f:n m kertaluvun nollakohta, jos on olemassa analyyttinen funktio g, joka on määritelty z_0:n ympäristössä, jossa $g(z_0) \neq 0$ ja*

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

kaikille z tässä ympäristössä. Nollakohta z_0 on isoloitu, jos on olemassa z_0:n ympäristö X:ssa, jossa z_0 on ainoa f:n nollakohta.

Tällöin pätee $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{m-1}(z_0) = 0$ ja $f^m(z_0) \neq 0$. [32] Todistetaan seuraavaksi projektiolause. Sitä ennen esitetään sen todistuksessa tarvittava lause:

Lause. 8 *Olkoon Ω origon 0 ympäristö avaruudessa $\mathbf{C}^n$, $f \in H(\Omega)$, $g \in H(\Omega)$, ja funktiolla $f(0', z_n)$ on kertaluvun m nollakohta pisteessä $z_n = 0$.*
1) Tällöin on olemassa polykiekko $\Delta = \Delta' \times \Delta_n \subset \Omega$, jonka keskipiste on 0, siten, että $f(z', \cdot)$:lla on jokaisella $z' \in \Delta'$ tasan m nollakohtaa Δ_n:ssa (lukuunottamatta niiden monikertoja).
2) Jos näitä nollakohtia merkitään $\alpha_1(z'), \ldots, \alpha_m(z')$, kertoimet $c_0, \ldots, c_{m-1}$, jotka määritellään

$$\prod_{j=1}^{m} [\lambda - g(z', \alpha_j(z'))] = \lambda^m + \sum_{j=0}^{m-1} c_j(z')\lambda^j, \tag{5}$$

ovat holomorfisia Δ':ssa.

Tässä λ määräytyy seuraavasti: Koska funktiolla $f(0', \cdot)$ on m kertaluvun nolla pisteessä 0, ja koska yhden muuttujan holomorfisen funktion nollakohdat ovat diskreettejä pisteitä, on olemassa $r > 0$ siten, että funktiolla $f(0', \cdot)$ ei ole muita nollia kiekon $\{\lambda : |\lambda| < r\}$ sulkeumassa.

Lause. 9 ***Projektiolause.*** *Olkoon V alueen $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ alivaristo. Olkoon $n > 1$ ja $p = (p', p_n)$ piste V:ssa, ja*

$$L = \{(p', \lambda) : \lambda \in \mathbf{C}\}.$$

Jos p on $L \cap V$:n isoloitu piste, p on polykiekon $\Delta \subset \Omega$ keskipiste, jolle $\pi(V \cap \Delta)$ on $\pi(\Delta)$:n alivaristo.

Todistus. Yleisyyttä menettämättä oletetaan, että p on avaruuden $\mathbf{C}^n$ origo ja Ω on polykiekko, jossa V on määritelty holomorfisilla funktioilla $f_1, \ldots, f_r$. Oletuksen mukaan ainakin yhdelle f_i, olkoon se f_r, avaruuden $\mathbf{C}$ origo on $f_r(0', \cdot)$:n isoloitu nollakohta. Merkitään $f_r = F$. Nyt on olemassa polykiekko $\Delta = \Delta' \times \Delta_n \subset \Omega$, jonka keskipiste on origo, niin että polykiekolle, funktiolle F ja mille tahansa $g \in H(\Omega)$ pätee lauseen 8 päätelmä. Erityisesti pätee tulolle P, joka määritellään seuraavasti:

$$P(z') = \prod_{j=1}^{m} g(z', \alpha_j(z')), \quad (z' \in \Delta').$$

P on holomorfinen Δ':ssa. $\alpha_j(z')$:t $(1 \leq j \leq m)$ ovat $F(z', \cdot)$:n nollakohtia. Kiinnitetään nyt jokin $z' \in \Delta'$, $P(z') = 0$. On selvää, että $P(z') = 0$ jos ja vain jos jollekin $\alpha_j(z')$ pätee, että se on myös $g(z', \cdot)$:n nollakohta, siis jos ja vain jos F:lla ja g:lla on yhteinen nollakohta Δ:ssa. Näin ollen

$$\pi(\Delta \cap Z(F) \cap Z(g)) = Z(P). \tag{6}$$

Koska $P \in H(\Delta')$, voidaan päätellä, että $\pi(\Delta \cap Z(F) \cap Z(g))$ on $\Delta' = \pi(\Delta)$:n alivaristo.

Palataan funktioihin $f_1, \ldots, f_r$, jossa $f_r = F$, jotka määrittelevät V:n Ω:ssa (sillä V on niiden nollajoukon leikkaus Ω:n kanssa). Oletetaan, että $r > 1$. Valitaan seuraava matriisi c_{ij} sen vuoksi, että päästään funktioden f_i kautta käsiksi joukkoon $\pi(\Delta \cap V)$:

Olkoon (c_{ij}) suorakaiteen muotoinen matriisi, jonka alkiot ovat kompleksilukuja, jossa on $(r-1)m$ riviä, $(r-1)$ saraketta. Oletetaan myös, että tämän matriisin jokaisen neliömatriisin, joka on kokoa $(r-1) \times (r-1)$, determinantti ei ole nolla. Toisin sanoen sen jokainen joukko $(r-1)$ rivejä ovat toisistaan lineaarisesti riippumattomat. Määritellään

$$g_i = \sum_{j=1}^{r-1} c_{ij} f_j \quad (1 \leq i \leq rm - m).$$

Vaihtamalla g_i g:n paikalle yhtälöön (6) nähdään, että jokainen joukoista

$$E_i = \pi(\Delta \cap Z(F) \cap Z(g_i)) \tag{7}$$

on Δ':n alivaristo. Väitetään, että

$$\pi(\Delta \cap V) = \cap_i E_i. \tag{8}$$

Todistuksen ensimmäinen puoli: Olkoon $z \in \Delta \cap V$. Tällöin $z \in Z(g_i)$ kaikilla i ja $Z \in Z(F)$. Näin ollen $\pi(\Delta) \in E_i$ kaikilla i. Vasen puoli yhtälöstä (8) on siis oikean osajoukko.

Todistetaan toinen suunta: Olkoon $z' \in \cap E_i$. Jokaista $(r-1)m$ i:n arvoa kohti on olemassa $\alpha_k(z')$ siten, että

$$g_i(z', \alpha_k(z')) = 0 \, (\text{seuraa kohdasta (7)}). \tag{9}$$

Koska r käy yli m arvon, on olemassa k (kiinteä) ja joku rivi I $r-1$:stä i:n rivistä, jolle (9) pätee. Vastaavalla yhtälöryhmällä

$$\sum_{j=1}^{r-1} c_{ij} f_j(z', \alpha_k(z')) = g_i(z', \alpha_k(z')) = 0 \quad (i \in I)$$

on yksikäsitteinen ratkaisu, johtuen (c_{ij}):n valinnasta (riippumattomuus). Siispä $f_j(z', \alpha_k(z')) = 0$ kaikilla j, ja näin ollen $z' \in \pi(\Delta \cap V)$. Tämä todistaa kohdan (8). Koska jokainen E_i on Δ':n alivaristo, sama pätee niiden leikkaukselle.

Lause. 10 *Jokainen kompakti avaruuden* $\mathbf{C}^n$ *alivaristo on äärellinen joukko pisteitä.*

Todistus. Kun $n = 1$, lause pätee, sillä yhden muuttujan ei-vakion holomorfisen funktion nollajoukot ovat diskreettejä joukkoja. Olkoon $n \geq 2$, ja oletetaan, että lause pätee avaruudessa $\mathbf{C}^{n-1}$. Olkoon V $\mathbf{C}^n$:n kompakti alivaristo. Valitaan $z' \in \pi(V)$, missä $\pi : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^{n-1}$. Olkoon

$$L = \{(z', \lambda) : \lambda \in \mathbf{C}\}.$$

Jos L identifioidaan $\mathbf{C}$:n kanssa, $L \cap V$ on $\mathbf{C}$:n kompakti alivaristo, sillä se on äärellinen (suljettu ja yhden muuttujan tapauksessa muodostuu diskreeteistä pisteistä). Olkoot $p^{(i)}$, $(1 \leq i \leq m)$ joukon $L \cap V$ pisteet. Projektiolauseen perusteella jokainen $p^{(i)}$ on polykiekon $\Delta_i \in \mathbf{C}^n$ keskipiste siten, että $\pi(V \cap \Delta_i)$ on $\pi(\Delta_i)$:n alivaristo. Se osa V:sta, joka ei ole joukon $\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_m$ peittämä, on kompakti ja sillä on positiivinen etäisyys juokosta L (sillä $z' \in \pi(V)$). Näin ollen z' on polykiekon

$$\Delta' \subset \pi(\Delta_1) \cap \cdots \cap \pi(\Delta_m)$$

keskipiste, missä polykiekko on niin pieni, että kaikki V:n pisteet, jotka projisoituvat Δ':lle, sijaitsevat joukossa $\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_m$. Toisin sanoen $\Delta' \cap \pi(V)$ on Δ':n alivaristo. Koska Δ' on mielivaltaisesti valitun pisteen $z' \in \pi(V)$ ympäristö, ja koska $\pi(V)$ on kompakti ja siten suljettu, $\pi(V)$ on $\mathbf{C}^{n-1}$:n alivaristo. Näin ollen $\pi(V)$ on äärellinen joukko induktio-oletuksen mukaan. Koska jokainen $\pi(V)$:n piste on π-kuva V:n äärellisen monesta pisteestä, V on äärellisen monen joukon yhdiste. [17]

Huomautus. 1 *Lauseen 9 kohdan 1) perusteella nähdään, että millään holomorfisella useamman muuttujan funktiolla ei ole yhtään isoloitua nollakohtaa.*

Tämä nähdään siitä, että jokaista $z' \in D'$ vastaa tasan $z_n \in \Delta_n$:n m arvoa (ehkä myös näiden monikertoja), joilla $f(z', z_n) = 0$. Jos $Z(f)$ on f:n nollavaristo, tämä tarkoittaa, että $Z(f) \cap \Delta$ muodostuu m "arkista" Δ':ssa, jotka leikkaavat origossa.

Joukon $F^{-1}(w)$ pisteiden lukumäärää merkitään $\#(w)$.

4.2 F ei voi pienentää dimensiota

Jos $n = k$, F:n jakobiaani ei voi hävitä kaikissa Ω:n pisteissä. Muutoin lineaarioperaattorin $F'(z)$ aste olisi korkeintaan $2n-1$ jokaisella $z \in \Omega$. [18] Asteluku $2n$ viitaa kompleksiseen Jakobin matriisiin, kuvauksen F derivaattamatriisiin, joka muodostuu F:n reaalisen Jakobin matriisin $J_{\mathbf{R},f}$ avulla:

$$\text{Olkoon } f : D \subset \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^m,\ f = g + ih,$$

$$J_{\mathbf{R},f} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} (g_1)_{x_1} & \cdots & (g_1)_{x_n} & (g_1)_{y_1} & \cdots & (g_1)_{y_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (g_m)_{x_1} & \cdots & (g_m)_{x_n} & (g_m)_{y_1} & \cdots & (g_m)_{y_n} \\ \hline (h_1)_{x_1} & \cdots & (h_1)_{x_n} & (h_1)_{y_1} & \cdots & (h_1)_{y_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (h_m)_{x_1} & \cdots & (h_m)_{x_n} & (h_m)_{y_1} & \cdots & (h_m)_{y_n} \end{array}\right). \tag{10}$$

[37]

Jakobin matriisin asteluku kuvaa matriisin lineaarisesti riippumattomien sarakkeiden lukumäärää. Asteluku kertoo myös lineaarioperaattorin kuvan dimension. Jakobiaani on matriisin determinantti $detJ_{\mathbf{R},f}$, jolle pätee $det(J_{\mathbf{R},f}(z_0)) = det|J_f(z_0)|^2$, missä $J_f(z_0)$ on funktion f kompleksinen Jakobin matriisi. Pisteissä, joissa determinantti saa arvon nolla, matriisin esittämät vektorit ovat keskenään riippuvaisia. Astelauseen mukaan tällöin matriisin aste on pienempi kuin sen sarakkeiden lukumäärä.

Astelause, teoksessa [36], kertoo, että jos kuvauksen derivaattakuvauksen aste on r jokaisessa kuvauksen määrittelyjoukon pisteessä, niin on olemassa avoin joukko kuvauksen määrittelyjoukossa, jonka kuvan dimensio on r. Näin ollen, jos $F'(z)$:n aste on korkeintaan $2n-1$, kuvaus $F^{-1}(w)$ sisältää 1-ulotteisen moniston eli topologisen avaruuden, joka on lokaalisti homeomorfinen avaruuden $\mathbf{R}^n$ kanssa, mikä tarkoittaa, että joukko $F^{-1}(w)$ on ääretön jollekin $w \in \Omega'$, sillä siellä olisi ainakin yksi vapaa muuttuja $\in \mathbf{C}^n$. Tämä on ristiriidassa aiemmin todistetun seikan kanssa, että $F^{-1}(w)$ on äärellinen jokaiselle $w \in \Omega'$. Näin ollen jokaiselle aidolle holomorfiselle kuvaukselle $F : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^m$, $n \leq m$. Toisin sanoen F ei voi pienentää dimensiota. [18]

4.3 Kuvauksen kääntyvyys, biholomorfisuus

Tässä alaluvussa käydään läpi kuvausten Jakobin matriisia, todistetaan käänteiskuvauslauseet ja kootaan niitä varten tarvittavaa teoriaa.

Määritelmä. 11 *Olkoon D_1, D_2 avaruuden $\mathbf{C}^n$ avoimia osajoukkoja ja $F : D_1 \to D_2$ holomorfinen kuvaus. Tällöin F on biholomorfinen tai kääntyvä holomorfinen kuvaus, jos F on bijektiivinen ja F^{-1} on holomorfinen.*

Lause. 11 *Olkoon $f : B \to \mathbf{C}$, $B \subset \mathbf{C}^n$, jatkuvasti reaalisesti differentioituva. Tällöin f on holomorfinen jos ja vain jos $f_{\overline{z}_a}(z) = 0$ identtisesti B:ssä jokaisella $a = 1, \ldots, n$*

Lause. 12 *Jos f ja g ovat holomorfisia, niin $(g \circ f)_{\overline{z}_a}(z) = 0$ identtisesti.*

Merkintä $\overline{\nabla} f(z) = (f_{\overline{z}_1}, \ldots, f_{\overline{z}_n})$.

Lause. 13 ***Käänteiskuvauslause.*** *Olkoon $z_0 \in D_1$ ja $w_0 = F(z_0)$. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*
1. On olemassa ympäristöt $U = U(z_0) \subset D_1$ ja $V = V(w_0) \subset D_2$, joille $F : U \to V$ on biholomorfinen.
2. $det J_f(z_0) \neq 0$.

Todistus. Jos $f|_U : U \to V$ on biholomorfinen, tällöin $(f|_U)^{-1} \circ f = id_U$, ja

$$I = det(E_n) = det(J_{(f|_U)^{-1}}(w_0) \cdot J_f(z_0)) = det(J_{(f|_U)^{-1}}(w_0)) \cdot det(J_f(z_0),$$

ja näin ollen $det(J_f(z_0) \neq 0$. Tässä on käytetty tietoa, että identiteettimatriisin determinantti saa arvon 1 sekä neliömatriisien determinanteille laskusääntöä $det(AB) = det(A)det(B)$.

Jos sitten $det(J_f(z_0)) \neq 0$, niin $det(J_{\mathbf{R},f(z_0)} = |J_f(z_0)|^2 \neq 0$, missä $J_{\mathbf{R},f(z_0)}$ on f:n reaalinen Jakobin matriisi. Reaalianalyysin nojalla näin ollen f on kääntyvä, eli on olemassa ympäristöt $U = U(z_0) \subset B_1$ ja $V = V(w_0) \subset B_2$, joille $f|_U : U \to V$ on bijektiivinen ja $g = (f|_U)^{-1} : V \to U$ on jatkuvasti differentioituva kuvaus reaalisessa mielessä. Tällöin $f \circ g = id_V$ on holomorfinen kuvaus, ja jos $f = (f_1, \ldots, f_n)$ ja $g = (g_1, \ldots, g_n)$, niin

$$0 = (f_a \circ g)_{\overline{w}_b} = \sum_{c=1}^{n} ((f_a)_{z_c} \circ g) \cdot (g_c)_{\overline{w}_b}, \text{ kun } a, b = 1, \ldots, n,$$

mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että $0 = J_f \cdot (\overline{\nabla} g_1 \cdots \overline{\nabla} g_n)^T$. Koska J_f on kääntyvä, eikä siis saa arvoa nolla, seuraa $\overline{\nabla} g_c = 0$ jokaiselle c. Näin ollen f on holomorfinen. [38]

Huomataan, että pisteissä tai joukoissa, joissa kuvaus f on kääntyvä, kuvauksen jakobiaani ei saa arvoa nolla. Näin ollen reaalinen jakobiaani saa positiivisen arvon, sillä pätee $det(J_{\mathbf{R},f}(z_0)) = det|J_f(z_0)|^2$. Tämän johdosta f säilyttää suunnistuksen.

Todistetaan vielä lause kääntyville kuvauksille $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$. Ennen sitä ketjusääntö:

Lause. 14

$$(\overline{D}_j h)(z) = \sum_{i=1}^{n} \{(D_i) g(w)(\overline{D}_j f_i)(z) + (\overline{D}_i g)(w)(\overline{D}_j \overline{f}_i)(z)\}, \tag{11}$$

sillä $\overline{D}_j = \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} z_i = 0$ jokaiselle i. Tässä $w = F(z)$. Kun F on holomorfinen, $\overline{D}_j f_i = 0$. Näin ollen $D_j \overline{f}_i = 0$, ja (11) pelkistyy muotoon $\overline{D}_j h = \sum_{i=1}^{n} \overline{D}_i g \cdot \overline{D}_j \overline{f}_i$.

Lause. 15 ***Käänteiskuvauslause.*** *Olkoon Ω avoin avaruudessa $\mathbf{C}^n$, olkoon $F : \Omega \to \mathbf{C}^n$ holomorfinen ja olkoon $F'(p)$ kääntyvä jossain $p \in \Omega$. Tällöin on olemassa pisteen p ympäristö V, jolle F on injektio $V \to W$ ja F^{-1} on holomorfinen W:ssa.*

Todistus. Koska $F'(p)$ on kääntyvä $\mathbf{C}^n$:n lineaarioperaattorina, se on myös kääntyvä avaruuden $\mathbf{R}^{2n}$ lineaarioperaattorina. Näin ollen reaalinen versio kääntyvän kuvauksen lauseesta osoittaa, että F on injektiivinen kuvaus jostain pisteen p ympäristöstä V pisteen $F(p)$ ympäristöön W, ja jonka käänteiskuvaus $G \in C^1$. Lisäksi $F'(z)$ on kääntyvä kaikille $z \in V$. Osoitetaan, että $G = (g_1, \ldots, g_n)$ on holomorfinen kuvaus.

Kun $z \in V$, $G(F(z)) = z$, joten kun $1 \leq i \leq n$, $\underline{g_i(F(z)) = z_i}$, sovelletaan holomorfisen kuvauksen määrittelyyn käytettävää kaavaa (1) $\overline{D}_k$:lle. Tarkoituksena on näyttää, että $\overline{D}_j g_j = 0$.

Olkoon Ω avoin joukko avaruudessa $\mathbf{C}^k$, $F = (f_1, \ldots, f_n)$, $F : \Omega \to \mathbf{C}^n$, g kuvaa F:n kuvan $\mathbf{C}$:lle ja $f_1, \ldots, f_n \in C^1$. Jos $h = g \circ F = g(f_1, \ldots, f_n)$, niin kun $1 \leq j \leq k$ ja $z \in \Omega$:

Pisteessä z kuvaus $F'(z)$ on matriisi $A = (a_{ik})$, jossa $a_{jk} = (D_k f_j)(z)$, $(1 \leq j \leq m,\ 1 \leq k \leq n)$. Kun $m = 1$, $F'(z)h = \sum_{k=1}^{n} (D_k F)(z) h_k$, missä $D_j = \dfrac{\partial}{\partial z_j}$. $\overline{D}_j = \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_j}$.

Ketjusäännön (11) avulla saadaan

$$\sum_{j=1}^{n} (D_j g_i)(F(z))(\overline{D}_k \overline{f}_j)(z) = 0, \tag{12}$$

Koska $\overline{D}_k \overline{f}_j = \overline{D_k f_j}$, matriisi $(\overline{D}_k \overline{f}_j)$ on kääntyvä, sillä F' on kääntyvä. Koska F on nyt injektio, $F(z)$ ei voi saada arvoa 0 kaikilla $z \in V$, myöskään $(\overline{D}_k \overline{f}_j)$ ei voi olla nollamatriisi. Näin ollen täytyy olla $\overline{D}_j \overline{g}_j = 0$. Tämän perusteella $g_i \in H(W)$, ja määritelmän 6 perusteella G on holomorfinen kuvaus. [19]

4.4 Kriittiset arvot ja normaalit arvot. F on suljettu ja avoin kuvaus.

Olkoot Ω ja Ω' alueita avaruudessa $\mathbf{C}^n$ ja $F : \Omega \to \Omega'$ holomorfinen ja aito. Olkoon $M = Z(J)$, missä J on kuvauksen F jakobiaani ja $Z(J)$ on jakobiaanin J nollavaristo eli niiden pisteiden joukko, joissa J saa arvon nolla. Kuvajoukko $F(M)$ on F:n kriittinen joukko. Jokainen $w \in F(M)$ on F:n kriittinen arvo. Muut joukon $F(\Omega)$ pisteet ovat F:n normaaleja arvoja.

F on suljettu kuvaus, sillä se on aito kuvaus kuten todettu aidon kuvauksen määritelmässä. Jokaisen suljetun joukon kuva kuvauksessa F on suljettu. Erityisesti $F(M)$ ja $F(\Omega)$ ovat suljettuja joukkoja Ω':ssa. F:n normaalit arvot muodostavat avoimen joukon. Katsotaan seuraavaksi, mistä tämä nähdään. Jos joukko $F(\Omega)$ on suljettu joukossa Ω', niin $F(\Omega) = \Omega'$, sillä $\Omega \in \mathbf{C}^n$ on alue. Todistetaan tämä seuraavaksi. Todistuksen alussa otetaan käyttöön Hausdorffin mitta, Lipschitz-ehto, todistetaan sitten lause $\mathbf{R}^N$:n yksikkökuutiolle, esitellään Bairen lause ja tiheä joukko, todistetaaan apulause N-dimensioiselle kuutiolle. Näiden jälkeen seuraa tulos, jonka mukaan F on avoin kuvaus.

Määritelmä. 12 *Olkoon $A \subset \mathbf{R}^N$, $\epsilon > 0$. ϵ-peite A:lle on enintään numeroituva yhdiste joukkoja $A_i \subset \mathbf{R}^N$ siten, että $diam A_i < \epsilon$ kaikilla i ja $A = \cup A_i$. Jokaiselle $t > 0$ määritellään*

$$h_{\epsilon,t} = \inf \sum_i (diam A_i)^t,$$

missä infimum otetaan A:n ϵ-peitteistä $\{A_i\}$ ja

$$h_t(A) = \lim_{\epsilon \to 0} h_{\epsilon,t}(A)$$

on t-dimensioinen Hausdorff-mitta joukolle A.

Hausdorffin mittaa käytetään muun muassa analyyttisten varistojen ominaisuuksien tutkimisessa silloin, kun käytetään hyväksi varistojen kokoluokkaa. Koska Hausdorffin mitta ei liity avaruuden $\mathbf{C}^n$ kompleksiseen struktuuriin, niitä tutkitaan euklidisessa avaruudessa $\mathbf{R}^N$. Mitan tutkimisessa halutaan usein tarkan mitan sijaan selvittää saako $h_t(A)$ arvon nolla, positiivisen arvon vai arvon ääretön.

Hausdorffin dimensio joukolle A määritellään supremumina t:n yli niille joukoille, joille $h_t(A) > 0$.

Esitellään seuraavaksi Lipschitz-ehto:

Määritelmä. 13 *Jos $0 < \alpha \leq 1$, ja jos f on kompleksinen funktio määrittelyjoukossa S, B tai $\overline{B}$, f toteuttaa Lipschitz-ehdon kertaluvulla α tai lyhyemmin $f \in Lip\alpha$, jos*

$$|f(z) - f(w)| \leq c|z - w|^\alpha$$

jollekin $c = c_f < \infty$ ja kaikille z, w f:n määrittelyjoukossa.

Huomataan, että tämä määritelmä $Lip\alpha$:lle perustuu euklidiseen metriikkaan.

Holomorfinen Lipschitz-funktio kuuluu joukkoon $H(B) \cap Lip\alpha$.

Lause. 16 *Jos $h_t(A) < \infty$ ja $F \in Lip1$, niin $h_t(F(A)) < \infty$.*

Lause. 17 *Olkoon Ω alue $\mathbf{C}^n$:ssä, $f \in H(\Omega)$ ja $f \neq 0$ identtisesti. Tällöin $Z(f)$ on kompaktien joukkojen K_j numeroituva yhdiste, missä $h_{2n-2}(K_j) < \infty$.*

Lause. 18 *Olkoon Q avaruuden $\mathbf{R}^N$ yksikkökuutio. Tällöin $h_t(Q) = \infty$, kun $t < N$.*

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$, k kokonaisluku, jolle $k > \epsilon^{-1} N^{-\frac{1}{2}}$. Peitetään Q k^N kappaleella kuutioita, joiden jokaisen reunan pituus on $\dfrac{1}{k}$. Niiden halkaisija on nyt $< \epsilon$.

Olkoon $t \leq N$. Olkoon joukko $\{A_i\}$ Q:n ϵ-peite kuten yllä. Olkoon δ_i A_i:n halkaisija. Peitetään jokainen A_i pallolla B_i, jonka säde on δ_i. Tällöin $m(B_i) = c\delta_i^N$, missä m on Lebesguen mitta $\mathbf{R}^N$:ssa[2], ja c on positiivinen reaaliluku, joka riippuu vain luvusta N. Koska $\delta_i \leq \epsilon$,

$$m(B_i) = c\delta_i^N = c\delta_i^{N-1}\delta_i \leq c\delta^{N-1}\delta_i^t \leq c\epsilon^{N-1}\delta_i^t,$$

ja pätee

$$\sum_i \delta_i^t \geq c^{-1}\epsilon^{t-N}\sum_i m(B_i) \geq c^{-1}\epsilon^{t-N},$$

sillä $\{B_i\}$ on Q:n peite ja $m(Q) = 1$. Näin ollen $h_N(Q) \geq c^{-1}$ ja $h_t(Q) = \infty$, jos $t < N$. [25]

Lause. 19 ***Bairen lause.*** *Jos X on täydellinen metrinen avaruus, numeroituvan monen tiheän avoimen joukon leikkaus on tiheä avaruudessa X. [30]*

Bairen lauseen toinen muoto sanoo, että täydellisen metrisen avaruuden X yhdiste suljetuista joukoista G_i, joilla ei ole sisäpisteitä, ei myöskään sisällä sisäpisteitä, sillä joukko $\cap\{X \backslash F_i\}$ on tiheä avaruudessa X, näin ollen sen sulkeuma $= X$. [43]

Jokainen lokaalisti kompakti Hausdorff-avaruus on täyttää Bairen lauseen ehdot, kun Bairen lauseessa täydellisyys korvataan äärellisen leikkauksen periaatteella, joka sanoo: jos A_i on joukon X osajoukot, joukkojen A_i joukkoperheellä A on tämä ominaisuus, jos sen minkä tahansa äärellisten joukkojen A_i leikkaus on epätyhjä. [41]

Määritelmä. 14 ***Tiheä joukko.*** *Joukko $A \subset X$ on tiheä, jos $\overline{A} = X$ eli jos jokainen ei-tyhjä avoin joukko kohtaa A:n. [42]*

Lause. 20 *Olkoon Ω yhtenäinen avoin joukko avaruudessa $\mathbf{R}^N$, $0 \leq t < N-1$ ja E (relatiivisesti) suljettu Ω:n osajoukko. Tällöin E on numeroituvan monen kompaktin joukon K_i yhdiste, joille $h_t(K_i) < \infty$. Tällöin $\Omega \backslash E$ on yhtenäinen.*

Lause. 21 *Jos $t < N$ ja N-dimensioinen kuutio Q on yhdiste numeroituvan monesta kompaktista joukosta K_i, niin $h_t(K_i) = \infty$ vähintään yhdelle i:lle.*

Todistus. Avaruuden $\mathbf{R}^N$ yksikkökuutio täyttää Bairen lauseen ehdot. Bairen lauseen mukaan jokin K_i sisältää N-kuution, sillä ne joukot K_i, joiden avaruudellinen dimensio on pienempi kuin N, ovat kompakteina joukkoina suljettuja, eivätkä sisällä N-ulotteisen kuution sisäpisteitä. Näiden joukkojen yhdiste ei Bairen lauseen mukaan myöskään sisällä kuution sisäpisteitä, ja jokaisen pienempiulotteisen joukon komplementtien leikkaus joukossa Q on tiheä joukko. Koska nyt joukot K_i peittävät Q:n, täytyy olla siis ainakin yksi joukko K_i, joka sisältää Q:n sisäpisteet, ja joka näin ollen on N-ulotteinen. Tälle joukolle $h_t = \infty$ lauseen 18 perusteella.

[2] Mitalle m σ-algebrassa $M \in \mathbf{R}^k$ pätee: Jos μ on positiivinen siirtoinvariantti Borelin mitta R^k:ssa, jolle $\mu(K) < \infty$ jokaisella kompaktilla joukolla K, niin on olemassa vakio c, jolle $\mu(E) = cm(E)$ jokaiselle Borelin joukoille $E \subset \mathbf{R}^k$. [29]

Lause. 22 *Olkoon Ω ja Ω' alueita avaruudessa $\mathbf{C}^n$, ja F holomorfinen ja aito kuvaus $\Omega \to \Omega'$. Tällöin*
i) $F(\Omega) = \Omega'$ ja
ii) F:n normaalit arvot muodostavat yhtenäisen avoimen joukon, joka on tiheä joukossa Ω'.

Sovelletaan aluksi koottuja lauseita alaluvun alussa mainittuun joukkoon $M = Z(J)$. Lauseen 17 perusteella M on numeroituva yhdiste kompakteista joukoistaa K_j, joille $h_{2n-2}(K_j) < \infty$. Jokainen K_j toteuttaa Lipschitz-ehdon: On olemassa K, jolle

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|^\alpha$$

kaikilla $x_1, x_2 \in K_j$.

Näin ollen $F(M)$ on numeroituva yhdiste kompakteista joukoista, joiden $(2n-1)$-Hausdorffin mitta on äärellinen. Tässä tarkastellaan lineaarikuvauksen F $2n-2$-dimensioista Hausdorff-mittaa, sillä jokainen F:n koordinaattifunktio f_i voidaan esittää muodossa $f_i(x,y) = u_i(x,y) + iv_i(x,y)$. Näin ollen koordinaattifunktioiden reaalinen dimensio on 2. Jos toistetaan sama päättely kuin yllä, pisteissä joissa F:n jakobiaani häviää, astelauseen mukaan lineaarikuvauksen F matriisin aste on pienempi kuin sen sarakkeiden määrä. Koska nyt jokainen kompleksiarvoisen funktion sarake muodostuu kahdesta reaalikomponentista, dimensio on korkeintaan $2n-2$. Koska edellä todettiin, että $F(M)$ on numeroituvan monen äärellisen joukon yhdiste, lause 21 on ristiriidassa tämän kanssa. Näin ollen lauseen 21 ehdot eivät päde. $F(M)$ ei siis muodosta $2N$-ulotteista kuutiota. Tästä voi päätellä, että joukolla $F(M)$ ei ole sisustaa $2N$-ulotteisen kuution tai avaruuden mielessä.

Lauseiden 17 ja 20 perusteella joukko $\Omega' \backslash F(M)$ on yhtenäinen. Jokainen Ω':n piste, joka on $F(\Omega)$:n rajapiste, sijaitsee joukossa $F(M)$, sillä $F(\Omega)$ on suljettu Ω':ssa, joten se sisältää rajapisteensä, ja normaalit arvot muodostavat avoimen joukon. Koska nyt $F(M)$ on liian pieni separoimaan joukkoa Ω', siis joukko Ω' ei voi olla yhdiste epätyhjistä joukoista $F(M) \cup F(\Omega)$, missä $F(M) \cap F(\Omega) = \emptyset$ [44], näin ollen $F(\Omega) = \Omega'$. Myöskin nähdään, että F:n normaalit arvot muodostavat yhtenäisen ja avoimen tiheän joukon F:n kuvajoukossa.

Oletetaan seuraavaksi, että kuvaus $F : \Omega \to \Omega'$ on holomorfinen ja että sen käänteiskuvaus kuvaa jokaisen pisteen kompaktiksi joukoksi. Tämän seurauksena nähdään, että F on avoin kuvaus. Kuvauksen F aitoutta ei oleteta tässä kohtaa. Mutta koska avoin holomorfinen kuvaus toteuttaa edellä mainitut ominaisuudet, nähdään erityisesti, että aito holomorfinen kuvaus on avoin kuvaus.

Lause. 23 *Olkoon Ω avaruuden $\mathbf{C}^n$ alue, $F : \Omega \to \Omega'$ holomorfinen ja $F^{-1}(w)$ kompakti jokaiselle $w \in \mathbf{C}^n$. Valitaan piste $p \in \Omega$. Jokainen p:n ympäristö sisältää yhtenäisen p:n ympäristön D, jolle F:n rajoittuma ympäristöön D on aito kuvaus $D \to F(D)$. Tästä seuraa, että F on avoin kuvaus.*

Todistus. Tarkoituksena on näyttää, että pisteelle p on olemassa ympäristö Ω_0, jossa F on aito kuvaus. Tämä tehdään näyttämällä, että F^{-1} kuvaa mielivaltaisen kuvajoukon kompaktin joukon kompaktiksi joukoksi Ω_0:ssa, kun F rajoittuu johonkin pisteen p ympäristöön Ω_0.

Merkitään $F(p) = w$. Koska $F^{-1}(w)$ on Ω:n kompakti varisto, $F^{-1}(w)$ on lauseen 10 mukaan äärellinen joukko. Näin ollen p on avoimen pallon Q sisällä niin, että p on suljetun pallon $\overline{Q} \subset \Omega$ ainoa piste, jonka F kuvaa pisteeksi w. Merkitään $E = F(\partial Q)$. Tällöin E on kompakti ja $w \neq E$. Näin ollen w sisältyy avoimeen palloon N, joka ei leikkaa joukkoa E.

Valitaan $\Omega_0 = Q \cap F^{-1}(N)$, ja olkoon K pallon N kompakti osajoukko. Koska reunapisteet eivät kuvaudu joukkoon N,

$$\Omega_0 \cap F^{-1}(K) = \overline{Q} \cap F^{-1}(K),$$

josta jälkimmäinen joukko on kompakti, sillä $\overline{Q}$ on avaruuden $\mathbf{C}^n$ kompakti osajoukko, ja $F^{-1}(K)$ on yhdiste kompakteista joukoista $F^{-1}(k_i)$, missä k_i on joukon K piste. On siis näytetty, että mielivaltainen F:n kuvajoukon kompakti joukko kuvautuu F:n käänteiskuvauksessa, F joukosta Ω_0, kompaktiksi joukoksi. Näin ollen F:n rajoittuma joukkon Ω_0 on aito kuvaus joukosta Ω_0 joukkoon N.

Jos D on Ω:n komponentti, joka sisältää pisteen p, tästä seuraa, että F:n rajoittuma D:lle on aito kuvaus $D \to N$. Nyt lauseen 22 mukaan $F(D) = N$. Koska D ei sisällä pallon Q reunaa, se on avoin joukko. Koska se on mielivaltaisesti valittu, js koska N on avoin, F on näin ollen avoin kuvaus. Koska piste p on mielivaltaisesti valittu, F on avoin kuvaus joukossa Ω. [20]

4.5 Harmoninen funktio ja Poisson-integraali

Esitellään tässä alaluvussa Poisson-integraali, Laplace-operaattori, subharmoninen ja pluriharmoninen funktio ja invariantti Laplace-operaattori, joita käytetään myöhemmissä todistuksissa.

Yhden muuttujan tapauksessa holomorfiset funktiot toteuttavat Cauchy-Riemannin yhtälöt (3). Holomorfinen funktio on äärettömän monta kertaa differentioituva, ja holomorfiset funktiot toteuttavat myös Laplacen yhtälön $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0$. Tällöin f on harmoninen funktio, mikä tarkoittaa sitä, että funktion reaali- ja imaginääriosat ovat harmonisia reaaliarvoisia funktioita. Laplace-yhtälölle pätee $\Delta f = 4\partial\overline{\partial} f$ olettaen, että $f_{xy} = f_{yx}$, mikä pätee, kun f:lla on jatkuvat toisen kertaluokan derivaatat. Tässä käytetään merkintöjä $f = u + iv$, missä $u = u(x, y)$ ja $v = v(x, y)$.

Lause. 24 ***Poisson-integraali.*** *Olkoon $f \in L^1(T)$, missä T on kompleksitason yksikkökiekon U reuna. Jos*

$$g(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t)\, \mathrm{d}t = P[f], \tag{13}$$

funktio g, joka on määritelty U:ssa, on f:n Poisson-integraali.

Kaavassa (13), jos $z = re^{i\theta}$, $(0 \leq r < 1,\ \theta$ reaalinen$)$,

$$P_r(\theta - t) = Re\left[\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right] = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}. \tag{14}$$

Lause. 25 *Jos $f \in L^1(T)$, niin $P[f]$ on harmoninen funktio U:ssa.*

Lause. 26 *Olkoon $f \in C(T)$. Hf määritellään suljetussa yksikkökiekossa $\overline{U}$ seuraavasti:*

$$(Hf)(re^{i\theta}) = \begin{cases} f(e^{i\theta}) & \text{jos} \quad r = 1, \\ P[f](re^{i\theta}) & \text{jos} \quad 0 \le r < 1. \end{cases}$$

Tällöin $Hf \in C(\overline{U})$.

Näin ollen jatkuvien funktioiden Poisson-integraalit käyttäytyvät hyvin myös lähellä U:n reunaa.

Lause. 27 *Olkoon u jatkuva reaaliarvoinen funktio suljetussa yksikkökiekossa $\overline{U}$, ja olkoon u harmoninen U:ssa. Tällöin joukossa U u on Poisson-integraali sen rajoittumasta joukoon T, ja u on holomorfisen funktion f reaaliosa, missä*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} u(e^{it})\, \mathrm{d}t, \quad (z \in U). \tag{15}$$

Teoria voidaan laajentaa mihin tahansa a-keskiseen kompleksitason kiekkoon muuttujanvaihdolla $re^{i\theta} = a + re^{i\theta}$. Jos tällöin u on jatkuva reaaliarvoinen funktio kiekon $D(a;R)$ reunalla, ja jos u on määritelty kiekossa $D(a;R)$ Poisson-integraalilla

$$u(a + e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2R\cos(\theta - t) + r^2} u(a + Re^{it})\, \mathrm{d}t, \tag{16}$$

tällöin u on jatkuva $\overline{D}(a;R)$:ssa ja harmoninen $D(a;R)$:ssa. Jos u on harmoninen ja reaalinen avoimessa X, ja jos $\overline{D}(a;R) \subset X$, tällöin u:lle pätee (16) $D(a;R)$:ssa, ja on olemassa holomorfinen funktio f, joka on määritelty $D(a;R)$:ssa, jonka reaaliosa u on. f on tällöin yksikäsitteisesti määritelty lisättävää mielivaltaista vakiota vaille. [31]

n-ulotteisessa avaruudessa funktion $f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$-Laplace-operaattori määritellään seuraavasti:

Määritelmä. 15 *Olkoon $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ avoin joukko, ja $f \in C^2(\Omega)$. Laplace-operaattori funktiolle f on*

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^f}{\partial y_j^2} \right). \tag{17}$$

Operaattori (17) voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\Delta f = 4 \sum_{j=1}^{n} D_j \overline{D}_j f, \tag{18}$$

missä $D_j = \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $\overline{D}_j = \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$, $z_j = x_j + iy_j$, x, y reaalisia.

Holomorfisille kuvauksille $F : \Omega \to \mathbf{C}^m$, missä $\Omega \subset \mathbf{C}^n$, lineaarioperaattori $F'(z) : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^m$ on kuvauksen F Jakobin matriisi kuten kohdassa (10). Jos operaattoriin (18) soveltaa ketjusääntöä, kun $f \in C^2$, pisteen $a \in \mathbf{C}^n$ ympäristössä, saadaan

$$g(\lambda) = g_{a,b}(\lambda) = f(a + \lambda b), \tag{19}$$

kun $b \in \mathbf{C}^n$ on kiinteä. Tässä $g = f \circ F$, missä $F(\lambda) = a + \lambda b$, (19) pätee λ:lle riittävän pienessä origon ympäristössä avaruudessa $\mathbf{C}$. Ketjusäännön avulla saadaan funktiolle $g = f \circ F$, missä $F(\lambda) = a + \lambda b$, pisteessä $\lambda = 0$:

$$(\Delta g)(0) = 4 \sum_{j,k=1}^{n} (D_j \overline{D}_k f)(a) b_j \bar{b}_k. \tag{20}$$

Olkoon $H_f(a)$ $n \times n$-matriisi, jossa $(D_j \overline{D}_k f)(a)$ on k:s rivi ja j:s sarake (tämä on kompleksinen f:n Hessian pisteessä a). Tällöin (20) $(\Delta g_{a,b})(0) = 4\langle H_f(a)b, b\rangle$. Nyt $g_{a,b}$ on harmoninen, jos ja vain jos $H_f(a) = 0$ kaikilla $a \in \Omega$, jolloin $D_j \overline{D}_k = 0$, $(j, k = 1 \ldots, n)$.

Tässä $\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w}_j$, $(z, w) \in \mathbf{C}^n$ on avaruuden $\mathbf{C}^n$ sisätulo. [22]

Esitellään seuraavaksi pluriharmoninen funktio. Edellä joukko $H(G) \cap C(\overline{G})$ on joukossa G holomorfisten ja joukossa $\overline{G}$ jatkuvien funktioiden joukko.

Määritelmä. 16 ***Pluriharmoninen funktio.*** *Olkoon $\Omega \in \mathbf{C}^n$ avoin joukko ja $u \in C^2(\Omega)$ reaaliarvoinen. Tällöin u on pluriharmoninen joukossa Ω, jos*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} = 0$$

joukossa Ω, kun $j, k = 1, \ldots, n$. $u \in C^2$ on pluriharmoninen jos ja vain jos jos sen rajoittuma joukkon Ω ja jokaiseen kompleksiseen suoraan, joka leikkaa joukon Ω, on harmoninen yhden kompleksimuuttujan funktio.

Pluriharmonisuuden määritelmä tarkoittaa sitä, että jokaiselle $a \in \Omega$ ja $b \in \mathbf{C}^n \backslash \{0\}$ yhden kompleksimuuttujan funktio $\lambda \mapsto u(a + \lambda b)$ ajateltuna kahden reaaliarvoisen muuttujan funktiona on harmoninen määrittelyjoukossaan. Kun $n = 1$, pluriharmonisuus tarkoittaa samaa kuin harmonisuus avaruudessa $\mathbf{R}^2$. Kun $n > 1$, pluriharmoniset funktiot ovat harmonisten funktioiden aito osajoukko. [10]

Lause. 28 *Olkoon $f \in H(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ avoin joukko. Tällöin $\log |f|$ on subharmoninen joukossa Ω.*

Lause. 29 *Olkoon $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ avoin joukko. $u \in C^2(\Omega)$ on pluriharmoninen, jos $D_j \overline{D}_k = 0$, $(j, k = 1, \ldots, n)$.*

Jos $f \in H(\Omega)$, tällöin $\overline{D}_k f = 0$ ja $D_j \overline{f} = 0$. Näin ollen f ja $\overline{f}$ ovat pluriharmonisia. Myös $f + \overline{f}$ on pluriharmoninen. Jokainen $u \in RP$ on pluriharmoninen, missä $RP(\Omega)$ on holomorfisten funktioiden reaaliosien luokka joukossa Ω. Radón lauseen 31, todistuksessa tarvitaan operaattoria $\tilde{\Delta}$:

Määritelmä. 17 *Olkoon $\Omega \subset B$ avoin osajoukko, $f \in C^2(\Omega)$ ja $a \in \Omega$. Tällöin*

$$(\tilde{\Delta} f)(a) = \Delta(f \circ \varphi_a)(0) \tag{21}$$

on f:n invariantti Laplace-operaattori, koska se kommutoi avaruuden $\mathbf{C}^n$ yksikköpallon B automorfismin kanssa, siis pätee $\tilde{\Delta}(f \circ \varphi = (\tilde{\Delta} f) \circ \varphi$, kun $f \in C^2(\Omega)$ ja $\varphi \in Aut(B)$ joukossa $\varphi^{-1}(\Omega)$ (todistus teoksessa [21]).

Operaattorissa (21)

$$\varphi_a(z) = \frac{a - P_a z - s_a Q_a z}{1 - \langle z, a \rangle}, \tag{22}$$

$$P_a z = \frac{\langle z, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a, \text{ jos } a \neq 0 \text{ identtisesti,} \tag{23}$$

$$s_a = (1 - |a|^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$Q_a = I - P_a.$$

Jokaiselle $\alpha \in \overline{U}$ ($\mathbf{C}$: yksikkökiekko) on olemassa automorfismi φ_α, joka vaihtaa α:n ja origon, nimittäin $\varphi_\alpha(\lambda) = (\alpha - \lambda)/(1 - \overline{\alpha}\lambda)$. Sama voidaan tehdä yksikköpallossa $B \subset \mathbf{C}^n$. Valitaan $a \in B$. P_a on $\mathbf{C}^n$:n ortogonaali projektio osajoukkoon $[a]$, joka on kehitetty a:lle. Ja olkoon $Q_a = I - P_a$ projektio $[a]$:n ortogonaalille komplemetille. Tällöin $P_0 = 0$, ja $P_a z$ kuten kaavassa (23). Jos $\Omega = \{z \in \mathbf{C}^n : \langle z, a \rangle \neq 1\}$, niin $\varphi_a : \Omega \to \mathbf{C}^n$ on holomorfinen joukossa $\overline{B} \subset \Omega$, sillä $|a| < 1$.

Kun $n = 1$, $P_a = I$, $Q_a = 0$ ja (22) redusoituu yksikkökiekon automorfismiksi (siis isomorfismiksi itselleen).

Lause. 30 *Jos $f \in C^2(\Omega)$ ja $a \in \Omega$, tällöin*

$$(\tilde{\Delta} f)(a) = 4(1 - |a|^2) \sum_{i,k=1}^{n} (\delta_{ik} - a_i \overline{a}_k)(D_i \overline{D}_k f)(a), \tag{24}$$

missä $\delta_{ik} = 0$, kun $i \neq k$, $\delta_i i = 1$. [22]

4.6 Siirrettävät nollakohdat

Todistetaan seuraavaksi Radón lause ja maksimiperiaate harmonisille funktioille:

Lause. 31 ***Maksimiperiaate harmonisille funktioille.*** *Olkoon Ω B:n avoin osajoukko, $u \in C(\overline{\Omega})$, $\tilde{\Delta} u = 0$ Ω:ssa, ja $u \leq 0$ $\partial\Omega$:ssa. Tällöin $u \leq 0$ joukossa Ω. (Sulkeuma ja raja suhteessa avaruuteen $\mathbf{C}^n$.)*

Todistus. Olkoon $h(z) = u(z) + \epsilon z_1 \overline{z}_1$ jollekin $\epsilon > 0$. Tällöin $h \leq \epsilon$ joukossa $\partial\Omega$ ja

$$(\overline{\Delta} h)(z) = 4\epsilon(1 - |z|^2)(1 - z_1 \overline{z}_1) > 0. \tag{25}$$

Yhtälö (25) perustuu kaavaan (24) funktiolle $z \mapsto \epsilon z_1 \overline{z}_1$, (sillä $\overline{\Delta} u = 0$ kaikkialla Ω:ssa), missä $i, k = 1$, sillä funktio h laajentaa funktiota u yksiulotteisesti suuntaan z_1. Näin ollen $\sum_{i,k}^{n}(\delta_{ik} - a_i a_k) = z_1 \overline{z}_1$ ja $D_i \overline{D}_1 = D_1 \overline{D}_1 = \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} = \epsilon$ kaikilla $z \in \Omega$. Jos funktiolla h on lokaali maksimi jollain $z \in \Omega$, tällöin funktiolla $h \circ \varphi_z$ on lokaali maksimi nollassa, sillä (21) pätee. Mutta nyt (25) pätee. Tästä muodostuu ristiriita, sillä lokaalissa maksimikohdassa funktion derivaatta ja näin ollen Laplace ei voi saada aidosti positiivista arvoa. Näin ollen $h < \epsilon$ joukossa Ω. Koska nyt ϵ on mielivaltaisen pieni, $h \to 0$, kun $\epsilon \to 0$. Näin ollen funktiolle u pätee $u \leq 0$ joukossa Ω, sillä $u \leq h$.

Lause 31 on maksimiperiaate harmoniselle funktiolle, joka on jatkuva joukon reunalla, harmoninen joukossa. Lause kertoo, että jos funktiolla on lokaali maksimi avoimessa joukossa, se on vakio. Muutoin funktio saavuttaa lokaalin maksimin joukon reunalla.

Lause. 32 ***Radón lause.*** *Olkoon Ω alue $\mathbf{C}^n$:ssa, $f : \Omega \to \mathbf{C}$ jatkuva ja f holomorfinen siinä Ω:n avoimessa osajoukossa, jossa $f(z) \neq 0$. Tällöin $f \in H(\Omega)$.*

Todistus. Riittää osoittaa tapaus $n = 1$, sillä osin holomorfinen jatkuva funktio on holomorfinen (5). Näin ollen, olkoon $\overline{U} \subset \Omega$. Olkoon $f \in C(\overline{U})$, $E = \{f = 0\}$, $f \in H(U \backslash E)$ ja $|f| < 1$. Olkoon $g = P[f]$, f:n rajoittuman joukkoon $T = \partial U$ Poisson-integraali kuten kohdassa (13). Olkoon α positiivinen vakio, ja määritellään

$$\varphi = Re(f - g) + \alpha \log |f|. \tag{26}$$

Tällöin φ on harmoninen joukossa $U \backslash E$, sillä f on holomorfisena funktiona harmoninen, g on harmoninen (25), niiden erotus on harmoninen, jolloin erotuksen reaaliosa on myös harmoninen, näin ollen analyyttinen joukossa $U \backslash E$. Analyyttisen eli holomorfisen funktion reaaliosa on harmoninen. Sama pätee holomorfisen funktion imaginääriosalle. Tämä perustuu Cauchy-Riemannin yhtälöihin (3). Niiden perusteella

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Näin ollen sekä reaali- että imaginääriosa toteuttavat Laplacen yhtälön

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \; [33]$$

$\log |f|$ on harmoninen, sillä se on harmonisen funktion $\log |f| + i\theta$, missä f on ajateltu muodossa $f = |f|e^{i\theta}$, reaaliosa, $f \neq 0$. Kahden harmonisen funktion summa on myös harmoninen funktio.

Kun $z \to z_0 \in E$, $(z \in U \backslash E)$, tällöin $\varphi \to -\infty$. ($\log 0 = -$"∞")

Kun $z \to e^{i\theta} \in T$, tällöin $\varphi(z) \to \alpha \log |f(e^{i\theta})| < 0$. ($|f| < 1$) Käytetään maksimiperiaatetta harmonisille funktioille.

Maksimiperiaatetta noudattaen yhtälössä (26) $\varphi(z) < 0$ joukossa $U\backslash E$, sillä φ:lla ei voi olla lokaalia maksimia avoimessa joukossa $U\backslash E$. Kun $\alpha \to 0$, voidaan päätellä $Re(f-g) \leq 0$ $U\backslash E$:ssa.

Jos valitaan $\alpha > 0$, sama päättely johtaa päätelmään $Re(f-g) \geq 0$ $U\backslash E$:ssa. Sama pätee imaginääriosille, sillä nekin ovat harmonisia. Näin ollen $f(z) = g(z)$ jokaiselle $z \in T \cup (\overline{U\backslash E}$.

Jos $z \in \partial E$, niin $f(z) = 0$. Näin ollen myös $g(z) = 0$. Koska g on harmoninen, tästä seuraa, että $g = 0$ identtisesti joukossa E, lauseet 24 ja 27. Näin ollen $f = g$ identtisesti joukossa $\overline{U}$. Erityisesti, $f \in C^1(U)$, ja $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$, (sillä f on harmoninen), $U\backslash E$:ssa kuten myös jokaisessa E:n sisäpisteessä. Jatkuvuuden perusteella $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ identtisesti joukossa U. Näin ollen, määritelmän 1 perusteella, $f \in H(U)$. [23]

4.7 F:n multiplisiteetti

Todistetaan seuraavaksi lause koskien kuvauksen F multiplisiteettiä. Esitellään poistuva joukko ja todistetaan lause koskien F:n biholomorfisuutta.

Määritelmä. 18 *Olkoon Ω alue avaruudessa $\mathbf{C}^n$. (Relatiivisesti) suljettu osajoukko $E \subset \Omega$ on H^∞-poistuva Ω:ssa, jos jokaisella rajoitetulla $f \in H(\Omega\backslash E)$ on olemassa laajennus $F \in H(\Omega)$.*

Sanotaan, että E on 1-dimensioisesti H^∞-poistuva Ω:ssa, jos $L \cap E$ on H^∞-poistuva $L \cap E$:ssa jokaiselle kompleksiselle suoralle L, joka sisältää pisteen $\Omega\backslash E$:ssa, mikä on tarkemmin sanottuna:

Jos $a \in \Omega\backslash E$, $b \in \mathbf{C}^n$,

$$V = \{\lambda \in \mathbf{C} : \ a + \lambda b \in \Omega\},$$

ja V_0 on se V:n komponentti, joka sisältää nollakohdan, tällöin

$$\{\lambda \in V_0 : a + \lambda b \in E\}$$

on H^∞-poistuva V_0:ssa.

Lause. 33 *Jos joukko E on relatiivisesti suljettu alueen $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ osajoukko, ja jos E on 1-dimensioisesti H^∞-poistuva Ω:ssa, niin E on H^∞-poistuva Ω:ssa.*

Lause. 34 *Jos Ω on $\mathbf{C}^n$:n alue ja $F : \Omega \to \mathbf{C}^n$ on holomorfinen ja injektio, tällöin F:n jakobiaanilla J ei ole nollakohtaa Ω:ssa. Tällöin F on biholomorfinen kuvaus $\Omega \to F(\Omega)$.*

Todistus. F täyttää lauseen 23 ehdot. Näin ollen F on avoin kuvaus $\Omega \to \Omega' = F(\Omega)$ siten, että F on homeomorfismi $\Omega \to \Omega'$, mikä tarkoittaa, että F on jatkuva, bijektiivinen kuvaus, jonka käänteiskuvaus F^{-1} on jatkuva [45]. Määritellään $g(w) = J(F^{-1}(w))$, $(w \in \Omega')$. Käänteiskuvauslauseen 15 perusteella $g \in H(\Omega'\backslash F(M))$, missä $M = Z(J)$, sillä F^{-1} on holomorfinen, jolloin myös sen derivaattakuvaus on holomorfinen. Koska g on jatkuva Ω':ssa ja $g(w) = 0$ tarkalleen silloin, kun $w \in F(M)$, Radón lauseen perusteella $g \in H(\Omega')$. Näin ollen $F(M) = Z(g)$, kuvauksen g nollajoukko, näin ollen nollavaristo, minkä vuoksi se on H^∞-poistuva kuten lauseessa 33. Tästä seuraa, että $F^{-1} \in H(\Omega')$. Ketjusääntö sovellettuna kuvaukseen $F^{-1}(F(z)) = z$ osoittaa, että $J(z) \neq 0$, (13), sillä nyt $F : \Omega \to \Omega'$ on biholomorfinen, eli F holomorfinen, injektio ja käänteiskuvaus on holomorfinen, siis M on tyhjä joukko.

Lause. 35 *Olkoon Ω ja Ω' alueita avaruudessa $\mathbf{C}^n$ ja $F : \Omega \to \Omega'$ holomorfinen ja aito kuvaus. Olkoon $\#(w)$ joukon $F^{-1}(w)$ pisteiden lukumäärä, missä $w \in \Omega'$. Tällöin:*
a) On olemassa kokonaisluku m, niin sanottu $F:n$ multiplisiteetti, jolle
$\#(w) = m$ jokaiselle F:n normaalille arvolle w,
$\#(w) < m$ jokaiselle $F:n$ kriittiselle arvolle w.
b) F:n kriittinen joukko on joukon Ω' nollavaristo.
c) Yleisemmin, $F(V)$ on joukon Ω' alivaristo aina, kun V on joukon Ω alivaristo.

Todistus. Olkoon $w_0 \in \Omega'$. Olkoon $z_1, \ldots, z_k$ pisteet $F^{-1}(w_0)$. Olkoon $k = \#(w_0)$. Tällöin on olemassa avoimet pallot Q_i, joiden keskipisteet ovat pisteet z_i, ja joiden sulkeumat $\overline{Q}_i$ ovat erilliset, ks. lauseen 23 todistus, ja sisältyvät joukkoon Ω. Olkoon

$$E = \Omega \backslash (Q_1 \cup \cdots \cup Q_k).$$

Tällöin E on suljettu Ω:ssa, koska F on aito kuvaus. Näin ollen $F(E)$ on suljettu Ω':ssa, niin että piste w_0 on avoimen pallon $N \subset \Omega' \backslash F(E)$ keskipiste. Määritellään $D_i = Q_i \cap F^{-1}(N)$, $(i = 1, \ldots, k)$. Lauseen 23 mukaan $F : D_i \to N$ on aito kuvaus jokaisella i. Nyt jokainen D_i on yhtenäinen, sillä F:n rajoittuma mihin tahansa D_i:n komponenttiin on aito.

Näin ollen $F(N) = N$. Mutta pisteellä w_0 on vain yksi käänteisalkio joukossa D_i. Lisäksi, F ei kuvaa yhtään alkiota joukon $D_1 \cup \cdots \cup D_k$ ulkopuolelta joukkoon N, sillä N ei leikkaa joukkoa $F(E)$.

On siis näytetty:
i) Jos $w_0 \in \Omega'$, $\#(w_0) = k$, $F^{-1}(w_0) = \{z_1, \ldots, z_k\}$, niin jokaisella z_j on erilliset yhtenäiset ympäristöt D_i, joille $F(D_i) = N$, $1 \leq i \leq k$, ja $F^{-1}(N) = D_1 \cup \cdots \cup D_k$.
ii) Ympäristöt D_i voi valita niin, että ne sisältyvät mainittuihin pisteiden z_i ympäristöihin.

Olkoon nyt w_0 kuvauksen F normaali arvo. Käänteiskuvauslauseen 15 perusteella D_i:t voidaan valita niin, että F on injektio jokaisella D_i. Nyt i) osoittaa, että $\#(w_0)$ jokaiselle $w \in N$. Koska kaikkien normaalien arvojen joukko on yhtenäinen, lause 22 , (koska se on tiheä), on olemassa m, joka täyttää ensimmäisen ehdon kohdasta a) ($\#(w) = m$ jokaiselle F:n normaalille arvolle).

Palataan kohtaan i). Mielivaltaiselle $w_0 \in \Omega'$ pätee, että N sisältää normaalin arvon w, koska F:n normaalit arvot muodostavat tiheän joukon Ω':ssa. Näin ollen kohta i) johtaa päätelmään, että $\#(w_0) \leq m$ jokaiselle $w \in \Omega'$. Jos

$\#(w_0) = m$, F on injektio jokaisessa alueessa D_i, sillä piste w_0 on mielivaltaisesti valittu, ja sama pätee tällöin jokaiselle Ω':n pisteelle.

Lauseen 34 perusteella jakobiaanilla J ei ole nollakohtaa D_i:ssa, joten w_0 on F:n normaali arvo. Tämä todistaa a):n.

Jos w_0 on normaali arvo, kohta i) ja käänteiskuvauslause 15 takaavat, että on olemassa holomorfiset kuvaukset

$$p_i : N \to D_i, \quad (1 \le i \le m), \tag{27}$$

jotka kääntävät F:n. Tulo

$$\psi(w) = \prod_{i=1}^{m} J(p_i(w)) \tag{28}$$

on tällöin holomorfinen alueessa $\Omega' \backslash F(M)$, missä $M = Z(J)$, ja kuvauksella $\psi(w)$ ei ole nollakohtia tässä alueessa. Olkoon $\psi(w) = 0$ jokaiselle $w \in F(M)$. Osoitetaan, että ψ on jatkuva Ω':ssa, jolloin Radón lause osoittaa, että $\psi \in H(\Omega)$. Koska $F(M)$ on ψ:n nollavaristo, tämä todistaa kohdan b).

Olkoon $w_0 \in F(M)$, $z_1 \in M$ sellainen, jolle $F(z_1) = w_0$ ja olkoon $\epsilon > 0$. Sovelletaan kohtaa i) pisteen z_1 ympäristöön D_1, joka on niin pieni, että $|J| < \epsilon$ D_1:ssa. Ainakin yksi tekijä tulossa (28) on tällöin itseisarvoltaan pienempi kuin ϵ N:ssa. Muut ovat rajoitettuja alueessa N, sillä p_i:t ovat holomorfisia, jolloin niiden jakobiaanit ovat äärellisiä. Tämä todistaa, että ψ on jatkuva pisteessä w_0, sillä $\psi(w_0) = 0$, ja ϵ on mielivaltainen, jolloin tulo (28) saadaan mielivaltaisen pieneksi N:ssä, ja näin ollen kohta b) pätee.

Todistetaan kohta c). Olkoon $g \in H(\Omega)$ ja olkoon kuvaukset $p_1, \ldots, p_m$ kuten kohdassa (27). Tulo

$$h(w) = \prod_{i=1}^{m} g(p_i(w)) \tag{29}$$

on holomorfinen $\Omega' \backslash F(M)$:ssa, sillä holomorfisten kuvausten yhdiste on holomorfinen. Jos K on kompakti Ω:ssa ja $w \in K \backslash F(M)$, tällöin $p_i(w)$ sijaitsee kompaktissa joukossa $F^{-1}(K)$ jokaisella i. Siten h on rajoitettu $K \backslash F(M)$:ssa. Koska $F(M)$ on nollavaristo, se on H^∞-poistuva, lauseet 18, 33 ja 31.

Lauseen 33 perusteella h laajenee holomorfiseksi Ω':ssa, ja (29) osoittaa, että

$$F(Z(g)) = Z(h). \tag{30}$$

Siispä $F(Z(g))$ on Ω':n alivaristo, koska tulo on silloin nolla jokaisella $Z(g)$.

Oletetaan seuraavaksi, että $V = Z(f_1) \cap \cdots \cap Z(f_{r-1})$, missä $f_1, \ldots, f_{r-1} \in H(\Omega)$, ja määritellään

$$g_i = \sum_{j=1}^{r-1} c_{ij} f_j \quad (1 \le i \le rm - m), \tag{31}$$

missä (c_{ij}) on matriisi kuten lauseen 8 todistuksessa. Käytetään samaa argumentointia osoittamaan, että

$$F(V) = \cap_i F(Z(g_i)).$$

Tämä osoittaa, että $F(V)$ on Ω':n alivaristo siinä tapauksessa, jossa V on globaalisti määritelty Ω:ssa nollavaristojen leikkauksena.

Yleisessä tapauksessa, olkoon $w_0 \in F(V)$ ja olkoon $D_1, \ldots, D_k, N$ kuten kohdassa i). Näin ollen jokainen D_i on niin pieni, että edellinen tapaus osoittaa, että $N \cap F(V)$ on N:n alivaristo jokaisella i. Koska

$$N \cap F(V) = \cup_{i=1}^{k} F(V \cap D_i),$$

kohta c) on todistettu. [24]

4.8 Ominaisuuksia

Olkoon $F : \Omega \to \Omega'$ aito holomorfinen kuvaus. Edellä on osoitettu kuvaukselle F seuraavat ominaisuudet:

1. F on suljettu kuvaus,
2. F on avoin kuvaus,
3. $F^{-1}(w)$ on äärellinen jokaiselle $w \in \Omega'$,
4. On olemassa kokonaisluku m, jolle
   (a) $\#(w) = m$ jokaiselle F:n normaalille arvolle,
   (b) $\#(w) < m$ jokaiselle F:n kriittiselle arvolle,
5. F:n kriittinen joukko on Ω':n nollavaristo,
6. $F(V)$ on Ω':n alivaristo aina, kun V on Ω:n alivaristo.

5 Pseudokonveksisuus

Monimuuttujaisten kompleksiarvoisten funktioiden teoriassa keskeinen tutkimusalue on holomorfisuuden määrittelyalueiden tutkimus. Tämä tarkoittaa niiden alueiden tutkimista, jotka takaavat holomorfisten funktioiden olemassaolon.

Olkoon Ω avaruuden $\mathbf{C}^n$ avoin osajoukko ja K kompakti joukko, joka sisältyy joukkoon Ω. Määritellään konveksi verho, joka tarkoittaa avaruuden $\mathbf{C}^n$ pienintä konveksia joukkoa, joka sisältää joukon K.

Holomorfisesti konveksi joukon K verho on:

$$K_{H(\Omega)} = \{z \in \Omega : |f(z)| \leq \|f\|_{z \in K} \text{ kaikille } f \in H(\Omega)\}.$$

Plurisubharmonisesti konveksi joukon K verho on:

$$K_{PSH(\Omega)} = \{z \in \Omega : u(z) \leq \sup_{z \in K} u(z) \text{ kaikille } u \in PSH(\Omega)\}.$$

Pätee $K_{PSH(\Omega)} \subset K_{H(\Omega)}$, sillä jos $f \in H(\Omega)$, niin $|f| \in PSH(\Omega)$.

Lauseesta 32 seuraa, että jokainen harmoninen funktio on plurisubharmoninen.

Lause. 36 *Olkoon $u : \Omega \to [-\infty, \infty)$ plurisubharmoninen. Tällöin jokaiselle $a \in \Omega$ ja $b \in \mathbf{C}^n$, joille*

$$\{a + \lambda b : \lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| \leq 1\} \subset \Omega,$$

pätee

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + e^{it} b) \, \mathrm{d}t.$$

Jos avoin joukko on holomorfisesti konveksi, se on pseudokonveksi. Yksiulotteisessa tapauksessa kaikki avoimet jouko ovat holomorfisesti konvekseja. Moniulotteisessa tapauksessa niiden määrittäminen on hankalampaa. Määrittelyssä käytetään seuraavaa lausetta:

Lause. 37 ***Hartog.*** *Olkoon Ω suljetun, avaruuden $\mathbf{C}^n$ polykiekon K avoin ympäristo, missä $n \geq 2$. Jos $f \in H(\Omega \backslash K)$, niin on olemassa holomorfinen funktio $\hat{f}$, joka on määritelty joukossa Ω ja jolle pätee $\hat{f}|_{\Omega \backslash K} = f$.*

Todistus. Olkoon $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$, $z' = (z_1, \ldots, z_{n-1})$. Yleisyyttä menettämättä oletetaan, että $K = \overline{P}(0, 1)$. Olkoon $r > 0$ siten, että $\overline{P}(0, r) \subset \Omega$. Riittää löytää funktio $\hat{f} \in H(P(0, r))$, joka laajentaa f:n. Koska $z' \in \overline{P}(0', r)$ on kiinteä, kuvaus $z_n \mapsto f(z', z_n)$ on holomorfinen rengasalueen $\overline{D}(0_n, r) \backslash \overline{D}(0, 1)$ ympäristössä. Näin ollen funktion Laurent-sarjan

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(z') z_j^j$$

kertoimet c_j ovat holomorfisia joukossa $P(0', r)$, sillä ne määräytyvät Cauchyn integraalikaavan kautta,

$$c_j(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|} \frac{f(z', \xi)}{\xi^{j+1}} \, \mathrm{d}\xi. \tag{32}$$

Jos $1 > |z'| < r$, kuvaus $z_n \mapsto f(z', z_n)$ on holomorfinen kiekossa $D(0_n, r)$. Näin ollen $c_j(z') = 0$ näille z' ja $j < 0$. Identiteettilauseen

Lause. 38 ***Identiteettilause.*** *Jos $f, g \in H(\Omega)$, Ω on yhtenäinen ja $f = g$ epätyhjässä avoimessa joukon Ω osajoukossa, tällöin $f = g$ joukossa Ω.*

perusteella $c_j \equiv 0$ kaikille $j < 0$. Määritellään

$$\hat{f}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(z') z_j^n \quad (x \in P(0, r)).$$

Tämä sarja suppenee itseisesti yhtälön (32) ja yksiulotteisen Abelin lauseen perusteella. Se suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa $P(0, r)$. Jos $z \in P(0, r)$ ja $j \geq 0$, niin Cauchyn estimaatin mukaan

$$|c_j(z') z_j^n| \leq M \left(\frac{|z_n|}{r} \right)^j,$$

missä $M = \|f\|_{\overline{P(0',r)}\times\partial D(0_n,r)}$. Estimaatti osoittaa suppenemisen. Käyttämällä Weierstrassin lausetta, joka kertoo, että jos jono holomorfisia funktioita suppenee kohti saman määrittelyalueen funktiota, niin tämä funktio on holomorfinen, saadaan, että $\hat{f}$ on holomorfinen. Koska $\hat{f}$ vastaa funktiota f epätyhjässä avoimessa joukon $P(0,r)\backslash\hat{P}(0,1)$ osajoukossa, identiteettilause takaa, että $\hat{f}$ on vaadittu funktion f laajennus.

Korollaari. 3 *Jos Ω ja K ovat kuin lauseessa 37, joukko $\Omega\backslash K$ ei ole holomorfisesti konveksi.*

Avoin joukko $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ on holomorfisuuden määrittelyalue, jos ei ole olemassa avoimia joukkoja Ω_1 ja Ω_2, joilla on seuraavat ominaisuudet:
i) $\emptyset \neq \Omega_1 \subset \Omega_2 \cap \Omega$;
ii) Ω_2 on yhtenäinen ja $\Omega_2\backslash\Omega \neq \emptyset$;
iii) jokaiselle $f \in H(\Omega)$ on olemassa $\hat{f} \in H(\Omega_2)$ siten, että $\hat{f}|_{\Omega_1} = f$.

Tämä tarkoittaa, että joukko Ω on holomorfisuuden määrittelyalue, jos sen rajalla $\partial\Omega$ ei ole olemassa kohtaa, jota pitkin voi holomorfisesti laajentaa jonkin joukossa Ω määritellyn holomorfisen funktion.

Määritelmä. 19 ***Etäisyysfunktio.*** *Olkoon δ positiivisia arvoja tai arvon nolla saava jatkuva funktio, joka on määritelty avaruudessa $\mathbf{C}^n$. Funktiolle δ pätee:*
i) $\delta(z) = 0$ jos ja vain jos $z = 0$;
ii) $\delta(\lambda z) = |\lambda|\delta(z)$ kaikille $z \in \mathbf{C}^n$, $\lambda \in \mathbf{C}$.
Näin määritelty funktio δ on avaruuden $\mathbf{C}^n$ etäisyysfunktio.

Lause. 39 ***Cartan-Thullen.*** *Olkoon δ avaruuden $\mathbf{C}^n$ etäisyysfunktio, ja olkoon $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ avoin joukko. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*
i) Ω on holomorfisuuden määrittelyalue;
ii) Ω on holomorfisesti konveksi;
iii) Jokaiselle kompaksille joukolle $K \subset \Omega$ ja $f \in H(\Omega)$, jos $|f| \leq \delta_\Omega$ joukossa K, niin $|f| \leq \delta_\Omega$ joukossa $\hat{K}_{H(\Omega)}$;
iv) Ω on funktion $f \in H(\Omega)$ olemassaolon määrittelyalue.

Lauseessa 39 määritelty holomorfisuuden määrittelyalue on pseudokonveksi.

Lause. 40 *Olkoon Ω holomorfisuuden määrittelyalue ja $z \mapsto \delta(z, \mathbf{C}^n\backslash\Omega)$ seuraava funktio:*
Jos $f \in H(\Omega)$, ja

$$|f(z)| \leq \delta(z, \mathbf{C}^n\backslash\Omega),\ z \in K,$$

missä $K \subset \Omega$ on kompakti, niin

$$|f(z)| \leq \delta(z, \mathbf{C}^n\backslash\Omega),\ z \in \hat{K}_\Omega.$$

Jos f on vakio, niin

$$\inf_{z\in K, w\in\mathbf{C}\backslash\Omega} \delta(z-w) = \inf_{z\in\hat{K}_\Omega, w\in\mathbf{C}\backslash\Omega} \delta(z-w).$$

Tällöin $-\log\delta(z, \mathbf{C}\backslash\Omega)$ on plurisubharmoninen ja jatkuva. [4]

Lause. 41 ***Pseudokonveksisuus.*** *Olkoon Ω avaruuden $\mathbf{C}^n$ aito osajoukko ja olkoon $\delta : \mathbf{C}^n \to \mathbf{R}_+$ etäisyysfunktio. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*
i) $-\log \delta_\Omega \in PSH(\Omega)$;
ii) On olemassa jatkuva plurisubharmoninen funktio $u : \Omega \to \mathbf{R}$ siten, että jokaiselle $c \in \mathbf{R}$ joukko $\{z \in \Omega : u(z) < c\}$ on relatiivisesti kompakti joukossa Ω;
iii) Jos K on kompakti joukon Ω osajoukko, samoin on joukko $\hat{K}_{PSH(\Omega)}$;
iv) Ω on pseudokonveksi;
v) Jokaiselle $a \in \partial\Omega$ on olemassa sellainen ympäristö W, jolle $W \cap \Omega$ on pseudokonveksi.

Todistus. Osoitetaan implikaatio i) $\to$ ii) määrittelemällä

$$u(z) = \max\{|z|, -\log \delta_\Omega(z)\}.$$

Huomataan, että kohta ii) edellyttää joukon Ω pseudokonveksisuutta. Näin ollen riittää osoittaa, että kohdasta ii) seuraa jokaiselle kompaktille joukolle $K \subset \Omega$

$$\hat{K}_{PSH(\Omega)} = \{z \in \Omega : v(z) \leq \sup v(K),\ v \in PSH \cap C(\Omega)\}.$$

Huomataan, että suunta $' \subset '$ pätee. Osoitetaan toinen suunta todistamalla, että jokaiselle $a \in \Omega \backslash \hat{K}_{PSH(\Omega)}$ on olemassa jatkuva plurisubharmoninen funktio $v : \Omega \to \mathbf{R}$, jolle $v(a) > \sup v(K)$: Olkoon $K \subset \Omega$ kompakti, ja olkoon $a \in \Omega \backslash \hat{K}_{PSH(\Omega)}$. Olkoon u funktio kuten kohdassa ii). Lisätään funktioon u vakio siten, että u on negatiivinen joukossa $K \cup \{a\}$. Valitaan funktio $w \in PSH(\Omega)$ siten, että $w(a) > 0$ ja $w|_K < 0$. Seuraavan plurisubharmonisten funktioiden approksimaatiolauseen perusteella

Lause. 42 *Olkoon Ω avaruuden $\mathbf{C}^n$ avoin osajoukko, ja olkoon $u \in PSH(\Omega)$. Jos $\epsilon > 0$ on sellainen, että $\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \epsilon\} \neq 0$, tällöin konvoluutio $u * \chi_\epsilon \in C^\infty \cap PSH(\Omega_\epsilon)$.*

on olemassa funktio w_1, jolle 1) $w_1 \in PSH(G) \cap C(\overline{G})$, missä $G = \{z \in \Omega : u(z) < 1\}$, (kohdan ii) perusteella G relatiivisesti kompakti Ω:ssa)
2) $w_1(a) > 0$,
3) $w_1|_K < 0$.

Olkoon $A = \sup\{w_1(z) : z \in G\}$ ja määritellään

$$v(z) = \begin{cases} \max\{w_1(z), Cu(z)\} & (z \in G) \\ Cu(z) & (z \in \Omega \backslash G). \end{cases}$$

Näin ollen $v \in PSH \cap C(\Omega)$, $v(a) > 0$, ja $v|_K < 0$, mikä todistaa väitetyn. Kohdasta iii) seuraa suoraan väite iv), sillä $K_{PSH(\Omega)} \subset K_{H(\Omega)}$, ja lauseen 39 perusteella $K_{H(\Omega)}$ on holomorfisuuden määrittelyalue. Todistuksen muut kohdat löytyvät teoksesta [11].

Määritelmä. 20 ***Aito pseudokonveksisuus.*** *Rajoitettu joukko $\Omega \in \mathbf{C}^n$ on aidosti pseudokonveksi, jos se on muotoa $\Omega = \{z \in \mathbf{C}^n : g(z) < 0\}$, missä g on C^2-funktio joukon Ω ympäristössä, ja joka toteuttaa seuraavat ehdot:*
i) $d_z g \neq 0$ jokaiselle $x \in \partial\Omega$;
ii) g on aidosti plurisubharmoninen joukon $\partial\Omega$ ympäristössä.

Funktio g yllä on joukon Ω määrittävä funktio.

Aito pseudokonveksisuus edellyttää pseudokonveksisuutta. [11]

6 Reunakäyttäytyminen

Todistetaan seuraavaksi lause, jonka mukaan aito holomorfinen kuvaus laajenee jatkuvasti määrittelyalueittensa reunoille.

Kootaan alkuun aputuloksia. Määritellään Carathéododyn metriikka, joka on tärkeä työkalu useamman muuttujan kompleksianalyysissa ja useamman kompleksimuuttujan geometrian ymmärtämisessä. [46]

6.1 Carathéodoryn metriikka

Poincarén metriikka varustaa kompleksitason $\mathbf{C}$ yksikkökiekon D metriikalla, joka on invariantti, siis muuttumaton tiettyjen matemaattisten ominaisuuksien suhteen, kiekon $D \to D$ konformikuvauksissa.

Konformikuvaukset muodostuvat rotaatiosta $\rho_0 : \zeta \mapsto e^{i\theta\zeta}$, kun $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ja Möbius-kuvauksista $\phi_a : \zeta \mapsto \dfrac{\zeta - a}{1 - \overline{a}\zeta}$, kun $a \in \mathbf{C}$ ja $|a| < 1$.

Näistä rotaatio säilyttää euklidisen etäisyyden, mutta Möbius-kuvaus ei.

Poincarén metriikan infinitesimaalinen muoto on

$$\rho(\zeta) = \frac{1}{1 - |\zeta|^2}.$$

Poincarén pituus vektorille ξ peruspisteessä P määritellään

$$\|\xi\|_{P,Poinc} = \rho(P) \cdot |\xi|,$$

missä $|\xi|$ on euklidinen vektorin ξ pituus. Näistä määritelmistä saadaan Poincarén metriikka

$$F_P^{\Omega}(P, \xi) = \frac{|\xi|}{1 - |P|^2}.$$

Poincarén metriikka on erityinen suhteessa yksikkökiekkoon D. Sen taustalla on Riemannin kuvauslauseen yleistys, jonka taustalla on seuraava ajatus: Jos X on mikä tahansa topologinen joukko tai avaruus, sille on yhdesti yhtenäinen peittävä joukko $\hat{X}$. Tämä konstruoidaan kiinnittämällä piste $x_0 \in X$ ja ajattelemalla kaikkien niiden joukon X polkujen, jotka lähtevät pisteestä x_0 muodostamaa avaruutta. Peittävä kuvaus $\pi : \hat{X} \to X$ on lokaali homeomorfismi.

Jos X on kompleksitason joukko, niin peittävä joukko tai avaruus $\hat{X}$ on kaksiulotteinen objekti. Näin ollen $\hat{X}$ on yhdesti yhtenäinen analyyttinen objekti.

Jos X on pallo, $\hat{X}$ on pallo. Jos $X = \mathbf{C}$ tai $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ tai torus tai sylinteri, $\hat{X}$ on $\mathbf{C}$.

Jos X on mikä tahansa litteä tason joukko tai avaruus poislukien koko tason sekä $\mathbf{C}\backslash\{0\}$:n, $\hat{X}$ on D.

Olkoon U tason määrittelyjoukko poislukien $\mathbf{C}$ ja $\mathbf{C}\backslash\{0\}$. Tällöin $\hat{U}$ on D, ja on olemassa kuvaus $\pi : D \to U$. Tällöin voidaan käyttää Poincarén metriikkaa kiekolta U:hun.

Mikä tahansa tason määrittelyjoukko voidaan varustaa metriikalla, joka on invariantti. Carathéodoryn metriikkaa käytetään tähän. Se pohjautuu Schwartz-Pick -lemmaan:

Lemma. 3 ***Schwartz-Pick.*** *Olkoon $f : D \to D$, $a \neq b$, $a, b \in D$ ja $f(a) = \alpha, f(b) = \beta$. Tällöin*

$$\left|\frac{\beta - \alpha}{1 - \overline{\alpha}\beta}\right| \leq \left|\frac{b - a}{1 - \overline{a}b}\right|;$$

$$|f'(a)| \leq \frac{1 - |\alpha|^2}{1 - |a|^2}.$$

Lemmasta seuraa, että holomorfinen funktio $f : D \to D$ vie jokaisen kiekon $D(0, r)$, missä $0 < r < 1$, kiekon kuvaan kuvauksella

$$z \mapsto \frac{z + \alpha}{1 + \overline{\alpha z}},$$

missä $f(0) = \alpha$. Tämä kuva on euklidinen kiekko, kun $-1 < \alpha < 1$, jonka keskipiste on reaaliakselilla ja halkaisija $\left[\dfrac{\alpha - r}{1 - \alpha r}, \dfrac{\alpha + r}{1 + \alpha r}\right]$.

Carathéodoryn infinitesimaalinen metriikka määrittelee tangenttivektorin pituuden jokaisessa pisteessä.

Olkoon $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ yhtenäinen, avoin joukko, $D(\Omega)$ holomorfisten funktioiden $\Omega \to D$ kokoelma. Jos $z \in \Omega$, niin merkitään $D^z(\Omega)$ joukon $D(\Omega)$ niiden elementtien g osakokoelma, joille pätee $g(z) = 0$. Kiinnitetään piste $P \in \Omega$ ja vektori ξ, joka ajatellaan tason tangentiksi pisteessä P.

Määritellään Carathéodoryn pituus, joka on vektorin ξ pituus pisteessä P:

Määritelmä. 21 ***Carathéodoryn pituus.***

$$F_C^{\Omega}(P, \xi) \equiv \sup_{f \in D^P(\Omega), f(P)=0} |f'(P)\xi|.$$

Tässä metriikka maksimoi $|f'(P)\xi|$:n kuvausten $f : \Omega \to D$ yli, mikä tarkoittaa $|f'(P)|$:n maksimointia.

Carathéodoryn metriikalla holomorfinen funktio on etäisyyden pienentävä kuvaus.

Väite. 1 ***Carathéodoryn metriikan etäisyyden pienentävä ominaisuus.*** *Olkoon $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbf{C}$, $z, w \in \Omega_1$, $\xi \in \mathbf{C}$ ja $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ holomorfinen. Tällöin*

$$F_C^{\Omega_2}(f(z), f'(z)\xi) \leq F_C^{\Omega_1}(z, \xi). \tag{33}$$

Todistus. Olkoon $\varphi : \Omega_2 \to D$, jolle $\varphi(f(z)) = 0$. Olkoon φ ehdokas Carathéodoryn metriikaksi pisteessä $f(z) \in \Omega_2$. Tällöin $\varphi \circ f$ on holomorfinen ja ehdokas Carathéodoryn metriikaksi pisteessä $z \in \Omega_1$. Näin ollen

$$F_C^{\Omega_1}(z,\xi)) \sup_{g \in D^z(\Omega_1)} |g'(z)\xi| \geq |(\varphi \circ f)'(z)\xi| = |\varphi'(0)| \cdot |f'(z)| \cdot |\xi|.$$

Otetaan supremum yli kaikkien ehdokkaiden φ, jolloin saadaan

$$F_C^{\Omega_1} \geq F_C^{\Omega_2}(f(z), f'(z)\xi).$$

[46]

Lemma. 4 *Olkoon $B \subset \mathbf{C}^n$ yksikköpallo ja $D_1 \subseteq B$ kiekko $\{(\zeta, 0, \ldots, 0) \in B\}$. Kiinnitetään $\xi = (t, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{C}^n$, $z \in D_1$. Tällöin*

$$F_D^B(z,\xi) = F_C^{D_1}(z,\xi). \text{ [47]}$$

6.2 Aito holomorfinen kuvaus laajenee jatkuvasti määrittelyalueittensa reunoille

Todistetaan sitten Henkinin lause, joka sanoo, että aito holomorfinen kuvaus aidosti pseudokonveksien joukkojen välillä laajenee jatkuvaksi kuvaukseksi kyseisten joukkojen sulkeumissa. Sen jälkeen todistetaan Henkinin lemma, joka sanoo, että lähtöjoukon jono, joka suppenee kohti lähtöjoukon reunaa, kuvautuu aidossa holomorfisessa kuvauksessa maalijoukon jonoksi, joka suppenee kuvauksessa kohti maalijoukon reunaa. Tämä todistaa aidoille holomorfisille kuvauksille tutkielman johdannossa esitetyn ehdon lähtöjoukon reunan kuvautumisesta maalijoukon reunalle.

Kootaan alkuun todistuksissa tarvittavia lauseita ja määritelmiä. Todistaan näistä Hardy-Littlewoodin lause.

Olkoon D rajoitettu avaruudessa $\mathbf{C}^n$. Olkoon $F_D(z,\xi)$ Carathéododyn metriikka, siis kuvaus $F_D : D \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{R}_+$, joka määritellään:

$$F_D(z,\xi) = \sup \left\{ \Big| \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial z_k}(z)\xi_k \Big| : f \in H(D), |f| < 1 \right\}.$$

[13] Tässä siis funktio $f : D \to B$, kun $D \in \mathbf{C}^n$ on rajoitettu alue.

Jos ∂D on sileä, niin niille $z \in \overline{D}$, jotka ovat riittävän lähellä reunaa ∂D, on olemassa yksikäsitteinen piste $z' \in \partial D$, joka on lähinnä pistettä z. Reaalinen tangenttipinta joukolle ∂D pisteessä z' sisältää maksimaalisen kompleksisen lineaarisen aliavaruuden C_z, jonka kompleksinen dimensio on $n - 1$. [13] Tämä nähdään seuraavasta:

Määritelmä. 22 ***Sileä reuna. Reunafunktio.*** *Olkoon $G \subset \mathbf{C}^n$ määrittelyalue. G:n reuna on sileä pisteessä $z_0 \in \partial G$, jos on olemassa avoin ympäristö $U = U(z_0) \subset \mathbf{C}^n$ ja funktio $b \in C^\infty(U; \mathbf{R})$ siten, että*
i) $U \cap G = \{z \in U : b(z) < 0\}$.
ii) $(db)_z \neq 0$, kun $z \in U$.
Funktio b on reunafunktio.

Käytetään funktiolle b implisiittifunktiolausetta:

Lause. 43 ***Implisiittifunktiolause.*** *Olkoon* $B \subset \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$ *avoin joukko,* $f = (f_1, \ldots, f_m) : B \to \mathbf{C}^m$ *holomorfinen kuvaus ja* $(z_0, w_0) \in B$ *piste, jolle* $f(z_0, w_0) = 0$ *ja*

$$det \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}(z_0, w_0) \mid \mu = 1, \ldots, m,\, \nu = n+1, \ldots, n+m \right) \neq 0.$$

Tällöin on olemassa avoin ympäristö $U = U' \times U'' \subset B$ *ja holomorfinen kuvaus* $g : U' \to U''$ *siten, että*

$$\{(z, w) \in U' \times U'' : f(z, w) = 0\} = \{(z, g(z)) : z \in U'\}.$$

Oletetaan, että $b_{y_n} \neq 0$. Implisiittifunktiolauseen perusteella on olemassa ympäristöt

U' pisteelle $(z_0', x_n) = (z_z^{(0)}, \ldots, z_{n-1}^{(0)}, x_n^{(0)}) \in \mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{R}$, ja U'' pisteelle $y_n^{(0)} \in \mathbf{R}$,

ja C^∞-funktio $\gamma : U' \to U''$, joille $\{(z', x_n, y_n) \in U' \times U'' : b(z', x_n + iy_n) = 0\} = \{(z', x_n, \gamma(z', x_n)) : (z', x_n) \in U'\}$.

Tässä $U = \{(z', x_n + iy_n) : (z', x_n) \in U'$ ja $y_n \in U''\}$. Erityisesti, $U \cap \partial G = \{z \in U : b(z) = 0\}$ on $(2n-1)$-dimensioinen differentioituva U:n osajoukko.

Jokaiselle $z_0 \in \partial G$ rajan reaalinen tangenttiavaruus

$$T_{z_0}(\partial G) = \{v \in T_{z_0} : (db)_{z_0}(v) = 0\}$$

on $(2n-1)$-dimensioinen reaalinen avaruuden T_{z_0} aliavaruus. Avaruus

$$H_{z_0}(\partial G) = T_{z_0}(\partial G) \cap iT_{z_0}(\partial G) = \{v \in T_{z_0} : (\partial b)_{z_0}(v) = 0\}$$

on kompleksinen reunan tangenttiavaruus pisteessä z_0. Se on $(2n-2)$-dimensioinen reaalinen avaruuden T_{z_0} aliavaruus, jolla on luonnollinen kompleksinen struktuuri, joten se on $(n-1)$-dimensioinen kompleksinen aliavaruus. [39]

Olkoo p_z avaruuden $\mathbf{C}^n$ ortogonaali projektio C_z:n ortogonaalille komplementille N_z, (jolla on dimensio yksi), ja olkoon $p_z^\perp$ ortogonaali projektio C_z:lle.

Euklidinen pituus ξ:lle merkitään $|\xi|$, ja etäisyys pisteestä z joukkoon S, $d(z, S) = \inf\{|z-p| : p \in S\}$. Tässä pseudokonveksi joukko sisältää erityisesti $C^\infty-$reunan.

Lemma. 5 *Olkoon* D *aidosti pseudokonveksi avaruuden* $\mathbf{C}^n$ *määrittelyalue. On olemassa positiiviset vakiot* c_1, c_2 *sitten, että jokaiselle* $z \in D$, *joka on riittävän lähellä reunaa* ∂D *ja jokaiselle* $\xi \in \mathbf{C}^n$,

$$c_1 \leq F_D(z, \xi) \left\{ \frac{|p_z(\xi)|}{d(z, \partial D)} + \frac{|p_z^\perp(\xi)|}{(d(z, \partial D))^{\frac{1}{2}}} \right\}^{-1} \leq c_2.$$

Lemma. 6 *Rajoitetulle alueelle* $G \Subset \mathbf{C}^n$, $z \in G$, $\xi \in \mathbf{C}^n$,

$$F_G(z, \xi) \leq \frac{|\xi|}{d(z, \partial G)}.$$

Huomataan, että $B(z,r)$ on Euklidinen pallo, jonka keskipiste on z ja säde r. Jos $B = B(z, d(z, \partial G))$, niin $B \subseteq G$, ja näin ollen $F_G(z,\xi) \leq F_B(z,\xi) = \dfrac{|\xi|}{d(z,\partial G)}$. [13]

Lemma. 7 ***Hopf'n lemma.*** *Olkoon $D \subseteq \mathbf{R}^N$ rajoitettu joukko, jolla on C^2-raja. Olkoon $f : \overline{D} \to \mathbf{R}$ harmoninen ja ei-vakio joukossa D ja C^1-funktio joukossa $\overline{D}$. Oletetaan, että f saa (ei välttämättä aidon) maksimin pisteessä $p \in \partial D$.*

Jos $v = v_p$ on ulospäin suuntautuva yksikkönormaali joukolle ∂D pisteessä p, niin $\dfrac{\partial f}{\partial v}(p) > 0$. [49]

Lause. 44 ***Hardy-Littlewood.*** *Funktio $f(\varsigma)$, joka on säännöllinen avoimessa kiekossa $|\varsigma| < 1$, on jatkuva suljetussa kiekossa $|\varsigma| \leq 1$ ja toteuttaa ympyrällä Lipschitz-ehdon $|\varsigma| = 1$*

$$|f(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta'})| \leq K|\theta - \theta'|^\alpha, \;\; 1 < \alpha \leq 1, \tag{34}$$

jos pätee

$$|f'(\varsigma)| \leq \frac{M}{(1-r)^{1-\alpha}}, \;\; r = |\varsigma|, \tag{35}$$

missä M on rajoitettu vakio, kun $|\varsigma| < 1$.

Todistus. Todistetaan suunta "$\Leftarrow$" tapauksessa $0 < \alpha < 1$. Oletetaan, että (35) pätee kiekossa $|\varsigma| < 1$. Tällöin integraali $\displaystyle\int_0^1 f'(re^{i\theta})\,\mathrm{d}r$ suppenee jokaisella θ ja näin ollen raja-arvo $f(e^{i\theta}) = \lim\limits_{r\to 1} f(re^{i\theta})$ on olemassa jokaiselle θ. Lisäksi jos (35) integroidaan muuttujan r suhteen nollasta arvoon r, missä $0 < r < 1$, nähdään että $f(\varsigma)$ on rajoitettu, kun $|\varsigma| < 1$, ja näin ollen se voidaan esittää Poisson-integraalina sen raja-arvojen $f(e^{i\theta})$ suhteen. Osoitetaan, että (34) pätee, mikä tarkoittaa f:n jatkuvuutta rajalla $|\varsigma| = 1$. [51]

Jos edellä polku $re^{i\theta}$ lähestyy pistettä $e^{i\theta}$ epätangentiaalisesti kiekon $|\varsigma| < 1$ sisällä, ja jos $f(\theta)$:n arvo Poisson-integraalissa $g(r,\theta)$, vrt. (13), pisteessä θ_0 on äärellinen, niin pätee $g(r,\theta) \to f(\theta_0)$ lähestyttäessä pistettä θ_0 epätangentiaalista polkua pitkin kiekon $|\varsigma| < 1$ sisällä. Poisson-integraalilla on melkein kaikkialla ympyrällä $|\varsigma| = 1$ raja-arvot pitkin epätangentiaalisia polkuja, ja raja-arvot ovat yhtä $f(\varsigma)$:n kanssa. Tarkempi selvitys teoksessa [52]. Näin ollen f on jatkuva kiekossa $|\varsigma| \leq 1$.

Osoitetaan (34), kun $|\theta - \theta'| < 1$. Nyt

$$f(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta'}) = \int_l f'(\varsigma)\,\mathrm{d}\varsigma,$$

missä l on käyrä, joka koostuu segmenteistä $(e^{i\theta}, he^{i\theta})$ ja $(e^{i\theta'}, e^{i\theta'})$ ja kaarista

$(e^{i\theta}, e^{i\theta'})$, kun $|\varsigma| = h$, missä $h = 1 - |\theta - \theta'|$. Tällöin pätee

$$\begin{aligned}|f(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta'})| &\leq \int_h^1 |f'(re^{i\theta})|\,\mathrm{d}r + |\int_\theta^{\theta'} h|f'(he^{it}|\,\mathrm{d}t| + \int_h^1 |f'(re^{i\theta'})|\,\mathrm{d}r \\ &\leq 2\int_h^1 \frac{M\,\mathrm{d}r}{(1-r)^{1-\alpha}} + \int_\theta^{\theta'} \frac{Mh}{(1-h)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}t \\ &= M\left(2\frac{(1-h)^\alpha}{\alpha} + \frac{h|\theta-\theta'|}{(1-h)^{1-\alpha}}\right) = M\left(\frac{2}{\alpha} + h\right)|\theta - \theta'|^\alpha,\end{aligned}$$

mikä on yhtäpitävää (34):n kanssa, kun $K = M\left(\dfrac{2}{\alpha} + 1\right)$. [51]

Lause. 45 ***Henkin.*** *Olkoon $\phi : D_1 \to D_2$ aito holomorfinen kuvaus aitojen pseudokonveksien joukkojen välillä. On olemassa positiivinen vakio c siten, että pisteille $z_1, z_2 \in D_1$ pätee*

$$|\phi(z_1) - \phi(z_2)| \leq c|z_1 - z_2|^{\frac{1}{2}}. \tag{36}$$

Erityisesti, ϕ laajenee jatkuvaksi kuvaukseksi $\overline{D}_1 \to \overline{D}_2$

Todistus. Määritellään kuvaukselle ϕ derivaatta pisteessä z $\phi'(z)$, joka on avaruuden $\mathbf{C}^n$ lineaarimuunnos operaattorinormissa:

$$\|\phi'(z)\| = \sup\left\{\frac{|\phi'(z)\xi|}{|\xi|} : \xi \in \mathbf{C}^n, \xi \neq 0\right\}.$$

Carathéodoryn metriikalle pätee (33):

$$F_{D_2}(\phi(z), \phi'(z)\xi) \leq F_{D_1}(z, \xi), \quad z \in D_1,\, \xi \in \mathbf{C}^n. \tag{37}$$

Lemman 5 seurauksena on olemassa $c_3 > 0$ siten, että

$$F_{D_2}(\phi(z), \phi'(z)\xi) \geq \frac{c_3|\phi(z)\xi|}{(d(\phi(z), \partial D_2))^{\frac{1}{2}}}, \quad z \in D_1,\, \xi \in \mathbf{C}^n, \tag{38}$$

sillä

$$\begin{aligned}F_{D_2}(\phi(z), \phi'(z)\xi) &\geq c_1\frac{|p_z(\phi'(z)\xi|}{d(\phi(z), \partial D_2} + c_1\frac{|p_z^\perp(\phi'(z)\xi|}{(d(\phi(z), \partial D_2)^{\frac{1}{2}}} \\ &\geq c_1\frac{|p_z^\perp(\phi'(z)\xi|}{(d(\phi(z), \partial D_2)^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{c_3|\phi(z)\xi|}{(d(\phi(z), \partial D_2))^{\frac{1}{2}}},\end{aligned}$$

kun $\quad 0 \leq c_3 \leq \dfrac{|p_z^\perp(\phi'(z)\xi)|}{|\phi'(z)\xi|}$. Lemman 6 mukaan

$$F_{D_1}(z, \xi) \leq \frac{|\xi|}{d(z, \partial D_1)}, \quad z \in D_1,\, \xi \in \mathbf{C}^n. \tag{39}$$

Nyt, (37), (38) ja (39) antavat

$$\|\phi'(z)\| \leq c_3^{-1} \left[\frac{d(\phi(z), \partial D_2)}{d(z, \partial D_1)} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(d(z, \partial D_1))^{\frac{1}{2}}}, \quad z \in D_1, \tag{40}$$

sillä

$$\frac{c_3 |\phi(z)\xi|}{(d(\phi(z), \partial D_2))^{\frac{1}{2}}} \leq F_{D_1}(z, \xi) \leq \frac{|\xi|}{d(z, \partial D)},$$

mistä saadaan

$$\frac{|\phi'(z)\xi|}{|\xi|} \leq c_3^{-1} \left[\frac{d(\phi(z), \partial D_2)}{d(z, \partial D_1)} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(d(z, \partial D_1))^{\frac{1}{2}}}.$$

Näytetään, että keskimmäinen tekijä yhtälön (40) oikealla puolella on tasaisesti rajoitettu:

Joukko $D_1 = \{z : \sigma(z) < 0\}$, missä σ on C^∞, plurisubharmoninen funktio joukon $\overline{D}_1$ ympäristössä. Koska σ on sileä, siis jatkuva, on olemassa $c_4 > 0$ siten, että

$$|\sigma(z)| \leq c_4 d(z, \partial D_1), \quad z \in D_1. \tag{41}$$

Koska ϕ on aito kuvaus, se on "$\lambda \to 1$" -funktio (lause 35), sillä jos $w \in D_2$, $\phi^{-1}(w) = \{z_1, z_2 \ldots, z_\lambda\}$, jossa $z_i \in D_1$ laskettuina monikertoineen. Merkitään $S(w) = \max\{\sigma(z_k) : \phi^{-1} = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}\}$, kun $w \in D_2$.

Funktio S on plurisubharmoninen, sillä se on lokaalisti maksimi äärellisestä määrästä sellaisia funktioita. Koska $\sigma \equiv 0$ reunalla ∂D_1, se, että ϕ on aito, edellyttää, että S laajenee jatkuvasti joukkoon $\overline{D}_2$ ja saa identtisesti arvon nolla reunalla $\partial\overline{D}_2$. Koska S on subharmoninen, ja harmoninen funktio voidaan ajatella määritelmänsä perusteella maksimaalisena subharmonisena funktiona, voidaan soveltaa Hopf'n lemmaa, lemma 7.

Tästä ja väliarvolauseesta saadaan, sillä tangenttipinnan normaali on janan $d(w, \partial D_2)$ suuntainen, että on olemassa $c_5 > 0$ siten, että

$$|S(w)| \geq c_5 d(w, \partial D_2), \quad w \in D_2. \tag{42}$$

Tästä ja S:n määritelmästä seuraa:

$$|\sigma(z)| \geq |S(\phi(z))| \geq c_5 d(\phi(z), \partial D_2), \quad z \in D_1. \tag{43}$$

Nyt (41) ja (43) antavat

$$\frac{d(\phi(z), \partial D_2)}{d(z, \partial D_1)} \leq \frac{c_4}{c_5}. \tag{44}$$

Sijoitetaan nämä lausekkeeseen (40):

$$\|\phi'(z)\| \leq c_6 \frac{1}{(d(z, \partial D_1))^{\frac{1}{2}}}, \quad z \in D_1. \tag{45}$$

Nyt Henkinin lauseen 45 epäyhtälö seuraa käyttämällä yhtälöön (45) Hardy-Littelwoodin lausetta 44.

Rajoitetuille ja harmonisille holomorfisille funktioille arvot määrittelyalueiden reunoilla ovat olemassa melkein jokaisessa rajapisteessä, kun rajaa lähestytään epätangentiaalisesti.

Yksikkökiekon holomorfisille funktioille yhden muuttujan tapauksessa pätee Fatoun lause, jonka mukaan epätangentiaalinen lähestymistapa tapahtuu ns. Stolzin kulmassa, joka kulma on pienempi kuin pisteen tangenttisuora, kun pistettä lähestytään kiekon sisältä käsin.

Useamman kompleksimuuttujan tapauksessa yleisempi tulos pätee, missä jonkinlainen tangentiaalinen lähestyminen sallitaan.

Jos $D \subseteq \mathbf{C}^n$ on aidosti pseudokonveksi joukko ja $p \in \partial D$, olkoon

$$\mathscr{R}_c(p) = z \in D : d(z,p) \leq c(d(z,\partial D))^{\frac{1}{2}} \,\text{ja}\, d(z-p, C_p) \leq cd(z,\partial D),$$

kun $c > 1$.

Tässä C_p on maksimaalinen kompleksisesti lineaarinen reaalisen joukon ∂D reaalisen tangenttiavaruuden osajoukko pisteessä p.

$\mathscr{R}_c(p)$ on hyväksytty lähestymisalue, ja holomorfiselle funktiolle f alueessa D on määritelty hyväksyttävä raja-arvo pisteessä $p \in \partial D$, jos $\lim f(z)$, kun $z \in \mathscr{R}_c(p) \to p$, on olemassa kaikilla hyväksytyillä lähestymisalueilla $\mathbf{R}_c(p)$. Näillä ehdoilla reuna-arvoja koskevat tulokset pätevät.

Lause. 46 ***Yleistetty Fatoun lause.*** *Olkoon D aidosti pseudokonveksi määrittelyalue avaruudessa $\mathbf{C}^n$, kun $n > 1$, ja olkoon f holomorfinen funktio D:ssa. Tällöin f:lla on hyväksyttävä arvo melkein jokaisessa reunan ∂D pisteessä.*

Tämän lauseen sovelluksena saadaan:

Lause. 47 ***Henkinin lemma.*** *Olkoon $\phi : D_1 \to D_2$ aito holomorfinen kuvaus aidosti pseudokonveksissa avaruuden $\mathbf{C}^n$ määrittelyalueessa. Näin ollen Henkinin lauseen perusteella ϕ laajenee jatkuvasti kuvaukseksi $\overline{D}_1 \to \overline{D}_2$. Tällöin D_1:n jono, joka suppenee epätangentiaalisesti kohti reunaa ∂D_1 kuvautuu kuvauksella ϕ D_2:n jonoksi, joka suppenee hyväksyttävästi kohti reunaa ∂D_2. Tarkemmin, jos Λ on kartio D_1:ssa, jonka kärki on pisteessä $p \in D_1$ niin, että on olemassa $k > 1$ siten, että*

$$z \in \Lambda \longrightarrow d(z,p) \leq kd(z,\partial D_1), \tag{46}$$

niin on olemassa $C > 1$ siten, että

$$\phi(z) \in \mathscr{R}_c(q), \quad (q = \phi(p) \in \partial D_2), \quad z \in \Lambda,$$

ja z on riittävän lähellä pistettä p, toisin sanoen

$$d(\phi(z), q) \leq C(d(\phi(z)), \partial D_2))^{\frac{1}{2}}, \tag{47}$$

$$d(\phi(z) - q, C_q) \leq Cd(\phi(z), \partial D_2). \tag{48}$$

Todistus. Olkoon C positiivinen vakio, $\alpha \sim \beta$ tarkoittaa, että osamäärät $\dfrac{\alpha}{\beta}$ ja $\dfrac{\beta}{\alpha}$ ovat tasaisesti rajoitettuja.

Henkinin lauseen 45 perusteella pisteelle $z \in D_1$,

$$d(\phi(z), q) \leq C(d(z,p))^{\frac{1}{2}}. \tag{49}$$

Nyt, $D_2 = \{w : r(w) < 0\}$, missä r on C^∞-funktio ja aidosti plurisubharmoninen $\overline{D}_2$:n ympäristössä (20). Tällöin $r \circ \phi$ on plurisubharmoninen D_1:ssa ja laajenee jatkuvasti $\overline{D}_1$:een ja saa nolla-arvoja rajalla ∂D_1 (määritelmä 22). Näin ollen, sovelletaan Hopf'n lemmaa niin kuin kohdassa (42) ja saadaan $C > 0$ siten, että

$$|r \circ \phi(z)| \geq Cd(z, \partial D_1),$$

kun $z \in D_1$. Koska $dr \neq 0$ rajalla ∂D_1 (määritelmä 22),

$$d(\phi(z), \partial D_2) \sim |r(\phi(z)| \geq Cd(z, \partial D_1), \tag{50}$$

kun $z \in D_1$. Nyt (46), (49) ja (50) antavat väitteen (47).

Kuvaus $w \mapsto p_w$, joka on määritelty w:lle $\overline{D}_2$:ssa lähellä pistettä $q = \phi(p) \in \partial D_2$ on sileä, koska ∂D_2 on sileä. Näin ollen on olemassa $C > 0$ siten, että $\|p_w - p_q\| \leq c|w - q|$, kun $w \in \overline{D}_2$ riittävän lähellä pistettä q. Olkoon $w = \phi(x)$ ja päätellään, että

$$|p_q(\xi)| \leq |p_{\phi(x)}(\xi)| + C|\phi(x) - q||\xi|, \tag{51}$$

kun $\xi \in \mathbf{C}^n$ ja $x \in D_1$ riittävän lähellä pistettä p. Lemma 5 antaa

$$|p_{\phi(x)}(\xi)| \leq cd(\phi(x), \partial D_2)F(\phi(x), \xi),$$

kun $\xi \in \mathbf{C}^n$ ja $x \in D_1$ riittävän lähellä pistettä p.

Kun korvataan ξ $\phi'(x)\xi$:lla, saadaan

$$|p_{\phi(x)}(\phi'(x)\xi)| \leq Cd(\phi(x), \partial D_2)F_{D_2}(\phi(x).\phi'(x)\xi). \tag{52}$$

Sovelletaan yhtälöitä (37), (39) ja (44) yhtälön (52) oikeaan puoleen ja saadaan

$$|p_{\phi(x)}(\phi'(x)\xi)| \leq C|\xi|.$$

Yhtälöstä (51) saadaan käyttämällä yhtälöä (49)

$$|p_q(\phi'(x)\xi)| \leq C|\xi| + C|x - p|^{\frac{1}{2}}|\phi'(x)/xi|. \tag{53}$$

Koska

$$|\phi'(x)\xi| \leq \|\phi'(x)\||\xi| \leq \frac{C|\xi|}{(d(x, \partial D_1)^{\frac{1}{2}}},$$

missä käytetään yhtälöä (45), nyt (53) antaa

$$|p_q(\phi(x)\xi)| \leq C|\xi| \left[1 + \left\{\frac{|x-p|}{d(x, \partial D_1)}\right\}^{\frac{1}{2}}\right]. \tag{54}$$

Olkoon $z \in \Lambda$ (riittävän lähellä p:sta) ja olkoon $\alpha(t) = z + t(p - z)$, $0 \le t \le 1$. Huomataan, että $\alpha'(t) = p - z$ ja, koska $\alpha(t) \in \Lambda$,

$$\left\{ \frac{|\alpha(t) - p|}{d(\alpha(t), \partial D_1)} \right\}^{\frac{1}{2}} \le C \tag{55}$$

yhtälön (46) perusteella. Olkoon $x = \alpha(t)$ ja $\xi = \alpha'(t) = p - z$ yhtälössä (54) ja sovelletaan yhtälöä (55), josta saadaan

$$|(p_q \circ \phi \circ \alpha)'(t)| \le C|p - z|. \tag{56}$$

Olkoon $\beta(t) = \phi \circ \alpha(t) - q$, $0 \le t \le 1$, ja huomataan, että $(p_q \circ \beta)' = (p_q \circ \phi \circ \alpha)'$ ja $\beta(1) = 0$.

Näin ollen

$$\begin{aligned} d(\phi(z) - q, C_q) &= |p_q(\phi(z) - q)| \\ &= |p_q(\beta(0))| = |p_q \circ \beta(1) - p_q \circ \beta(0)| \\ &= \left| \int_0^1 (p_q \circ \beta)'(t)\,\mathrm{d}t \right| \\ &= \left| \int_0^1 (p_q \circ \phi \circ \alpha)'(t)\,\mathrm{d}t \right|. \end{aligned}$$

Integroidaan (56) nollasta yhteen ja saadaan

$$d(\phi(z) - q, C_q) \le C|p - z|.$$

Lopuksi arvioidaan $|p - q|$ yhtälöiden (46) ja (50) avulla, joista saadaan (48). [13]

6.3 Aito holomorfinen kuvaus avaruuden $\mathbf{C}^n$ yksikköpallolta itselleen on automorfismi

Todistetaan seuraavaksi tulos, jonka mukaan aito holomorfinen kuvaus avaruuden $\mathbf{C}^n$ yksikköpallolta itselleen on automorfismi, siis struktuurin säilyttävä ja kääntyvä kuvaus.

Kootaan aluksi aputuloksia.

Lause. 48 ***Fefferman.*** *Olkoon D_1, D_2 aidosti pseudokonvekseja avaruuden $\mathbf{C}^n$ osajoukkoja ja olkoon $D_3 \subset D_2$ avoin joukko. Olkoon $p \in \partial D_2 \cap \partial D_3$ siten, että jollekin $\delta > 0$ pätee*

$$B(p, \delta) \cap D_2 = B(p, \delta) \cap D_3.$$

Olkoon ϕ biholomorfinen kuvaus joukolta D_1 joukkoon D_2 siten, että se laajenee jatkuvaksi kuvaukseksi $\overline{D}_1 \to \overline{D}_2$ ja $\phi(q) = p$ jollekin $q \in \partial D_1$. Tällöin ϕ laajenee C^∞-kuvaukseksi q:n ympäristössä avaruudessa $\mathbf{C}^n$.

Seuraava lause karakterisoi lokaalisti pallon automorfismit:

Lause. 49 ***Lokaali karakterisaatiolause.*** *Olkoon $p \in \partial B_n$, missä B_n on avaruuden $\mathbf{C}^n$ yksikköpallo ja $n > 1$. Olkoon F kuvaus, joka ei ole vakio, pisteen p ympäristöstä N avaruuteen $\mathbf{C}^n$. Tässä N sisältyy suljettuun palloon $\overline{B}_n$. Olkoon F holomorfinen joukossa $N \cap B_n$ ja sileä eli C^∞-funktio ympäristössä N. Jos $F(N \cap \partial B_n) \subseteq \partial B_n$, niin F laajenee pallon B_n automorfismiksi.*

Luvun tulosta varten määritellään seuraavat: Olkoon $\phi : D_1 \to D_2$ aito holomorfinen kuvaus, D_1, D_2 aitoja pseudokonvekseja joukkoja, joilla on C^∞-rajat.

Näin ollen ϕ on haarautuva peite haarautumisluvulla λ, siis pisteelle $w \in D_2$ $\phi^{-1}(w) = \{z_1, \ldots, z_\lambda\}$, missä $z_k \in D_1$ on laskettu monikertoineen. Henkinin lauseen 45 mukaan ϕ laajenee jatkuvaksi kuvaukseksi $\overline{D}_1 \to \overline{D}_2$, jolle $\phi(\partial D_1) \subseteq \partial D_2$.

Väite. 2 *Nollamittaista joukon ∂D_2 osajoukkoa lukuunottamatta pisteellä $p \in \partial D_2$ on tasan λ alkukuvaa, siis pätee $\#|\phi^{-1}(p)| = \lambda$.*

Todistus. Olkoon f polynomi avaruudessa $\mathbf{C}^n$. Kun $z \in D_2$, polynomi tuntemattomalle X:

$$P_f(X, z) = \prod(X - f(z_k)) = X^\lambda + f_1(z)X^{\lambda-1} + \cdots + f_\lambda(z),$$

missä $\phi^{-1}(z) = \{z_1, \ldots, z_\lambda\}$.

Funktiot f_k ovat rajoitettuja ja holomorfisia joukossa D_2. Yleistetyn Fatoun lauseen 45 mukaan on olemassa joukko S_f, jonka mitta on nolla rajalla ∂D_2 siten, että jokaisella λ funktiolla f_k on kelvollinen raja f_k^* joukossa $\partial D_2 \backslash S_f$.

Olkoon $\mathscr{F}$ numeroituva joukko avaruuden $\mathbf{C}^n$ polynomeja, joilla on rationaaliset kompleksiset kertoimet, ja olkoon $S^* = \cup\{S_f : f \in \mathscr{F}\}$ joukko, jonka mitta on nolla rajalla ∂D_2.

Väitetään, että jos $p \in \partial D_2 \backslash S^*$, niin $\#\{\phi^{-1}(p)\} \leq \lambda$.

Tehdään vastaoletus: Jollekin $p \in \partial D_2 \backslash S^*$ on olemassa vähintään $\lambda + 1$ erillistä pistettä $q_1, \ldots, q_{\lambda+1}$ joukossa $\{\phi^{-1}(p)\}$.

Valitaan $f \in \mathscr{F}$, joka separoi pisteet $q_1, \ldots, q_{\lambda+1}$, siis pätee $f(q_a) \neq f(q_b)$, kun $a \neq b$. Kun $p \neq S^*$,

$$P_f(X, p) = X^\lambda + \sum_{k=0}^{\lambda-1} f^*_{\lambda-k}(p)X^k$$

on hyvin määritelty. Väitetään, että $f(q_i)$ on $P_f(X, p)$:n juuri, kun $1 \leq i \leq \lambda+1$. Otetaan $\{w_i\} \subseteq D_1$ siten, että $w_i \to q_1$ epätangentaalisesti. Tällöin Henkinin lemmasta 47 seuraa, että $\phi(w_i) \to \phi(q_1) = p$ hyväksyttävästi, ja näin ollen S^*:n konstruktion mukaan $P_f(X, \phi(w_i))$:n kertoimet suppenevat $P_f(X, p)$:n kertoimiin. Näin ollen polynomin juurien jatkuvuuden perusteella $f(w_i)$, joka on $P_f(X, \phi(w_i))$:n juuri, suppenee kohti $P_f(X, p)$:n juurta. Tämän vuoksi $f(q_1)$ on $P_f(X, p)$:n juuri. Samoin $f(q_i)$ on $P_f(X, p)$:n juuri, kun $1 \leq i \leq \lambda + 1$. Tämä on ristiriita, sillä $P_f(X, p)$ on yhden muuttujan polynomi, jonka aste on λ.

Osoitetaan vielä, että mitallisen joukon ∂D_2 pisteelle p pätee, että $\#\{\phi^{-1}(p)\} = \lambda$:

Olkoon $x \in D_2$ siten, että $\phi^{-1}(x)$ sisältää λ erillistä pistettä, ja valitaan $\mathbf{C}^n$:n polynomi g, joka separoi nämä λ pistettä.

Polynomin $P_g(X, z)$ diskriminantti $h(z)$ on rajoitettu holomorfinen funktio joukossa D_2, ja $h \equiv 0$, sillä $h(x) \neq 0$. Näin ollen on olemassa ∂D_2:n nollamittainen osajoukko T^* siten, että joukossa $\partial D_2 \backslash T^*$ h:lla on epätangentiaalinen raja h^*, jonka arvot eivät ole nolla.

Väitetään, että kun $a \in \partial D_2 \backslash (T^* \cup S^*)$, joukossa $\{\phi^{-1}(a)\}$ on λ pistettä.

Vastaoletus: $\{\phi^{-1}(a)\} = \{a_1, \ldots, a_\mu\} \subseteq \partial \overline{D}_1$, missä $1 \leq \mu < \lambda$. Valitaan $\{z_i\} \subseteq D_2$ siten, että $z_i \to a$ epätangentiaalisesti.

Joukot $\{\phi^{-1}(z_i)\} \to \{a_1, \ldots, a_\mu\}$ siinä mielessä, että $\{\phi^{-1}(z_i)\}$ sisältyy mihin tahansa $\{a_1, \ldots, a_\mu\}$:n ympäristöön, joten

$$g\{\phi^{-1}(z_i)\} \to \{g(a_1), \ldots, g(a_\mu)\}$$

joukkoina. Tästä seuraa, että $h(z_i) \to 0$ (sillä $\mu \leq \lambda$). Näin ollen $h^*(a) = \lim h(z_i) = 0$, mikä on ristiriidassa T^*:n määritelmän kanssa.

Edellisessä todistuksessa käytetään tietoa, jonka mukaan seikka $h \equiv 0$ johtaa tietoon, että h^* voi hävitä korkeintaan nollamittaisessa joukossa. Yksiulotteisessa kompleksisessa kiekossa tämä on Fatoun lause rajoitetuille holomorfisille funktioille. Useampiulotteisen kompleksiavaruuden aidon pseudokonveksin joukon D_2 tapauksessa tulos voidaan johtaa havaitsemalla, että jos h^* häviäisi jollakin positiivimittaisella joukon ∂D_2 osajoukolla, niin olisi olemassa perhe joukon D_2 kiekkoja, joiden rajat ovat rajalla ∂D_2 siten, että h^* häviäisi joukossa, jolla on positiivinen mitta. Tästä seuraisi, että h häviäisi identtisesti joukossa D_2.

Väite. 3 *On olemassa tiheä relatiivisesti avoin joukko $W \subset \partial D_2$ siten, että ϕ laajenee C^∞-kuvaukseksi joukossa $\phi^{-1}(W) \subseteq \partial D_1$.*

Todistus. Olkoon $p \in \partial D_2$ siten, kuin väitteessä 1, että $\phi^{-1}(p) = \{q_1, \ldots, q_\lambda\}$. Valitaan $0 < r < \dfrac{1}{2} \min\limits_{i \neq j} |q_i - q_j|$ siten, että joukot $\Omega_i \equiv D_1 \cap B(q_i, r)$, $1 \leq i \leq \lambda$, ovat erilliset. Koska kompaktin joukon

$$\cup_{1 \leq i \leq \lambda} \phi(\overline{D}_1 \cap \partial B(q_i, r))$$

etäisyys pisteestä p on positiivinen jollakin $\delta > 0$, ja koska ϕ on avoin kuvaus $D_1 \to D_2$, seuraa, että avoimen joukon $\phi(\Omega_i) \subset D_2$ reuna on erillinen joukosta $\Omega \equiv D_2 \cap B(p, \delta)$, missä δ on riittävän pieni niin, että Ω on yhtenäinen. Koska $\phi(\Omega_i)$ sisältää pisteitä mielivaltaisen läheltä pistettä p, yhtenäisyyden perusteella $\Omega \subseteq \phi(\Omega_i)$. Olkoon

$$\Omega_i = \phi^{-1}(\Omega) \cap \Omega_i.$$

Koska ϕ on haarautuva kuvaus haarautumisluvulla λ, se on siis $\lambda \to 1$ -kuvaus, joukoilla $D_1 \to D_2$. Näin ollen ϕ kuvaa jokaisen Ω_i:n, missä $1 \leq i \leq \lambda$, biholomorfisesti injektiona, siis $1 \to 1$ -kuvauksena, joukkoon Ω.

Väite: Riittävän pienelle $\epsilon < r$ pätee $\Omega_i' \cap B(q_i, \epsilon) = D_1 \cap B(q_i, \epsilon)$.

Vastaoletus: On olemassa $\{z_j\} \subseteq D_1 \backslash \Omega'_i$ siten, että $z_j \to q_i$. Mutta tällöin $\phi(z_j)$ on lopulta joukossa Ω, ja siten z_j on lopulta joukossa $\phi^{-1}(\Omega) \cap \Omega_i = \Omega'_i$, mikä on ristiriita.

Päätellään, että $\partial\Omega$ sisältää pisteen q_i ympäristön joukossa ∂D_1.

Kiinnitetään $1 \leq i \leq \lambda$, ja olkoon D'_1 aidosti pseudokonveksi joukon Ω'_i osajoukko, jolle $\partial D'_1$ sisältää pisteen q_i ympäristön, joka on joukossa ∂D_1. Olkoon $D_3 = \phi(D'_1)$.

Nyt D_2 ja D_3 toteuttavat Feffermanin lauseen 48 jollain $\delta > 0$. Lisäksi ϕ kuvaa joukon D'_1 biholomorfisesti joukkoon D_3 ja laajenee jatkuvaksi kuvaukseksi $\overline{D}_1 \to \overline{D}_3$. Voidaan soveltaa Feffermanin lausetta kuvaukseen $\phi : D'_1 \to D_3 \subseteq D_2$ ja päätellä, että ϕ laajenee C^∞-kuvaukseksi lähellä pistettä q_i. Tästä seuraa, että ϕ on C^∞-kuvaus koko pisteen p ympäristön alkukuvassa. Ympäristö on joukossa ∂D_2. Näistä seuraa, että ne ∂D_2:n pisteet, joiden alkukuville ϕ on C^∞-kuvaus, muodostavat avoimen joukon, joka on täysimittainen (lukuun ottamatta nollamittaista joukkoa, kuten väitteessä 1 todetaan) ja näin ollen tiheä joukossa ∂D_2.

Väitteen 2 perusteella aito holomorfinen kuvaus $\phi : B_n \to B_n$ laajenee C^∞-kuvaukseksi jonkin pisteen, joka sijaitsee rajalla ∂B_n, ympäristössä. Lokaalin karakterisaatiolauseen 49 perusteella ϕ laajenee pallon B_n automorfismiksi. [13]

Avaruuden $\mathbf{C}$ aidot holomorfiset kuvaukset, jotka kuvaavat yksikkökiekon $U \subset \mathbf{C}$ yksikkökiekkoon U, voivat olla mitä multiplisiteettia m $(m > 1)$ tahansa. Yksinkertaisin näistä kuvauksista on kuvaus $z \mapsto z^m$. Kun U korvataan avaruuden $\mathbf{C}^n$ yksikköpallolla B_n $(n > 1)$, tilanne muuttuu. Tällöin haarautumista ei voi tapahtua, ja näin ollen multiplisiteetti on 1 ja kuvaukset ovat automorfismeja. [26]

7 Haarautuminen

Koska aito holomorfinen kuvaus kuvaa lähtöjoukkonsa jonot, jotka suppenevat kohti lähtöjoukkonsa reunaa, jonoiksi jotka suppenevat kohti maalialueensa reunaa, aito holomorfinen kuvaus on haarautuva peittävä kuvaus jollain haarautumisluvulla $\lambda \geq 1$. [13] Haarautuminen tapahtuu pitkin kuvauksen haarautumisuraa:

$$V_F = \{z \in \Omega : J_F(z) = 0\},$$

missä $J_F(z)$ on aidon holomorfisen kuvauksen Jakobin determinantti pisteessä z. Haarautuva kuvaus on peittävä kuvaus lukuun ottamatta pientä joukkoa. Peittävä kuvaus on jatkuva kuvaus topologisten avaruuksien välillä, jossa maalijoukon pisteillä on avoimet ympäristöt, jotka ovat yhtäläisesti peitettyjä kyseisessä kuvauksessa.

Nostetaan esiin kaksi tapausta, joissa haarautumiskäyttäytyminen kertoo, onko kuvaus biholomorfinen.

Jos $F : \Omega \to D$ ei ole haarautuva aito holomorfinen kuvaus, ja jos D on yhdesti yhtenäinen, tällöin F on biholomorfismi (11).

Jos $F : \Omega \to \Omega$ on ei-haarautuva aito holomorfinen kuvaus joukolta itselleen, ja jos Ω:lla on mielekäs reuna, tällöin F on biholomorfismi.

Haarautumista ei tapahdu edes määrittelyalueen reunalla sileässä biholomorfisessa tapauksessa. Jos $F : \Omega \to D$ on biholomorfinen kuvaus pseudokonveksien alueiden välillä, joilla on C^2-reunat, ja jos $F \in C^2(\overline{\Omega})$, tällöin $J_F \neq 0$ $\overline{\Omega}$:ssa ja $F^{-1} \in C^2(\overline{D})$. [1]

Esimerkki. Reinhardtin määrittelyjoukko. Olkoon Ω ja D Reinhardtin määrittelyjoukkoja.

Määritelmä. 23 *joukko* $A \subset \mathbf{C}^n$, $n > 1$, *on Reinhardtin määrittelyjoukko, jonka keskipiste on* $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{C}^n$, *jos mille tahansa* $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0) \in D$ *pätee, että joukko*

$$\{z = (z_1, \ldots, z_n) : |z_v - a_v| = |z_v^0 - a_v|, v = 1, \ldots, n\}$$

sisältyy joukkoon A.

Tämä tarkoittaa, että joukko on muuttumaton kuvausten

$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (e^{i\theta_1} z_1, \ldots, e^{i\theta_n} z_n)$$

suhteen kaikille $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbf{R}$ [53]. Jos $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathbf{C}^n$ ovat Reinhardtin määrittelyjoukkoja, joille pätee
1) $z_1 \cdots z_n \neq 0$, kun $(z_1, \ldots, z_n) \in \overline{\Omega}_j$,
2) $(z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}) \in \Omega_j$, jos $(z_1, \ldots, z_n) \in \Omega_j$, kun $j = 1, 2$,
niin jokainen aito holomorfinen epähaarautuva peite $F : \Omega_1 \to \Omega_2$ on muotoa

$$F = (f_1, \ldots, f_n), \text{ jossa } f_j = c_j z_1^{\mu_j^1} \cdots z_n^{\mu_j^n} \text{ ja } \mu_j^k \in \mathbf{Z}. \tag{57}$$

Jos $\Omega \subset\subset \mathbf{C}^n$ toteuttaa 1) ja jos $F : \Omega \to \Omega$ on aito holomorfinen kuvaus joukolta itselleen, tällöin $F \in Aut(\Omega)$, ja erityisesti F on muotoa (57).

Esimerkki. Täydellinen ympyrämuotoinen määrittelyjoukko. Jos Ω, D ovat ympyrämuotoisia ja täydellisiä, mikä tarkoittaa, että ne ovat muuttumattomia kuvauksen

$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n),$$

suhteen, kun $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| \leq 1$, niin jokainen aito holomorfinen kuvaus $F : \Omega \to D$, jolle $F^{-1}(0) = \{0\}$, on polynomi.

7.1 Yleinen haarautuminen

Jos $F : \Omega \to D$ on aito holomorfinen kuvaus, niin myös kuvaus

$$F_0 = F|_V : V \to W, \tag{58}$$

on aito ja holomorfinen, missä $V = V_F$ ja $W = F(V_F)$. Tietyt lokaalit singulariteettikäyttäytymiset eivät ole mahdollisia aidoille holomorfisille kuvauksille. Esimerkiksi aito holomorfinen kuvaus ei voi olla muotoa $h(z, w) = (z, zw)$ lähellä origoa, sillä $h^{-1}(0, 0) = \{0\} \times \mathbf{C}$, jolla on positivinen dimensio.

On olemassa suhde kuvauksen yleisen haarautumiskertaluvun alueen reunalla ja kertaluvun, jolla Levin muoto häviää, välillä. [1]

Määritelmä. 24 ***Levin muoto.*** *Olkoon*

$$\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w}_j,$$

kun $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbf{C}^n$. *Kuvauksen* $u \in C^2$ *Levin muoto pisteessä* $a \in \Omega$ *on*

$$\langle Lu(a)b, c\rangle = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(a) b_j \overline{c}_k,$$

missä $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{C}^n$.

Lause. 50 *Funktio* u *on plurisubharmoninen joukossa* Ω, *jos* $\langle Lu(a)b, b\rangle \geq 0$ *kaikille* $a \in \Omega$, $b \in \mathbf{C}^n$. *Se on aidosti plurisubharmoninen joukossa* Ω, *jos* $\langle Lu(a)b, b\rangle > 0$ *kaikille* $a \in \Omega$, $b \in \mathbf{C}^n \backslash \{0\}$.

[12]

Esimerkki. Jos $F(z, w) = (z, w^2)$, tällöin $F : \Omega_1 \to \Omega_2$ ja $F : \Omega_2 \to \Omega_3$ ovat aitoja holomorfisia kuvauksia, missä

$$\Omega_1 = \{|z|^1 + |w|^4 < 1\},$$
$$\Omega_2 = \{|z|^1 + |w|^2 < 1\},$$
$$\Omega_3 = \{|z|^1 + |w| < 1\}.$$

Haarautumisura molemmissa tapauksissa on $V_F = \Delta \times \{0\}$. Tässä Ω_1 on Levi-konveksi $\partial\Omega_z \cap \overline{U}_F$:ssa, Ω_2 on aidosti pseudokonveksi $\partial\Omega_2 \cap \overline{U}_F$:ssa ja Ω_3 on sileä $\partial\Omega_3 \cap \overline{U}_F$:ssa.

Haarautumisluku pienentää Levi-konveksisuuden astetta. Jos reuna ei ole missään Levi-konveksi, tällöin haarautuvalla kuvauksella ei ole sileää kuvaa. [1]

Lause. 51 ***Levi-konveksisuus.*** *Olkoon* $G \subset\subset \mathbf{C}^n$, *siis relatiivisesti kompakti määrittelyjoukko, jolla on sileä raja. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*
1) G *on aidosti Levi-konveksi.*
2) On olemassa avoin ympäristö $U = U(\partial G)$ *ja aidosti plurisubharmoninen funktio* $g \in C^\infty(U; \mathbf{R})$ *siten, että* $U \cap G = \{z \in U : g(z) < 0\}$ *ja* $(dg)_z \neq 0$, *kun* $z \in U$.
3) Jokaiselle $z \in \partial G$ *on olemassa avoin ympäristö* $A = A(z) \subset \mathbf{C}^n$, *avoin joukko* $B \subset \mathbf{C}^n$ *ja biholomorfinen kuvaus* $F : B \to A$ *siten, että* $F(B \cap G)$ *on konveksi ja aidosti konveksi jokaisessa joukon* $F(B \cap \partial G)$ *pisteessä. [40]*

Esimerkki. 1 ***Pseudokonveksisuus.*** *Jos* $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ *on aidosti pseudokonveksi, niin* Ω*:lla on määrittelevä funktio* $\hat{\rho}$, *jolle*

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(P) w_j \overline{w}_k \geq c|w|^2$$

kaikille $P \in \partial\Omega$ ja kaikille $w \in \mathbf{C}^n$.

Olkoon $\Omega = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^4 < 1\}$. Tällöin $\rho(z_1, z_2) = -1 + |z_1|^2 + |z_2|^4$ on määrittävä funktio joukolle Ω ja Levin muoto sovellettuna pisteeseen (w_1, w_2) on $|w_1|^2 + 4|z_2|^2|w_2|^2$. Näin ollen joukko $\partial\Omega$ on aidosti pseudokonveksi lukuunottamatta rajapisteitä, joissa $|z_2|^2 = 0$, ja tangenttivektorit w toteuttavat $w_1 = 0$. [50]

Viitteet

[1] Eric Bedford: *Proper Holomorphic Mappings*, Bulletin of the American Mathematical Society, Volume 10, Number 2, April 1984

[2] Lars Hörmander: *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, D.Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey (1966), ss. 5-6

[3] s. 118

[4] ss. 38-45

[5] Maciej Klimek: *Pluripotential Theory*, Oxford University Press, Oxford, (1991), s. 6

[6] ss. 38-63

[7] s. 84

[8] s. 25

[9] ss. viii-ix

[10] ss. 35-39

[11] ss. 38-84

[12] s. 9

[13] H. Alexander: *Proper Holomorphic Mappings in* $\mathbf{C}^n$, Indiana University Mathematics Journal, 1977-JSTOR

[14] Ludger Kaup, Gottfried Barthel, Michael Bridgland, Burchard Kaup and Gottfried Barthel: *Holomorphic Functions of Several Variables: An Introduction to the Fundamental Theory*, De Gryter (1983), s. 2

[15] ss. 11-15

[16] Walter Rudin: *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbf{C}^n$, Springer, Verlag-Berlin Heidelberg (1980), ss. 7-8

[17] ss. 228-300

[18] s. 301

[19] ss. 8-12

[20] ss. 295-302

[21] s. 47

[22] ss. 20-59

[23] ss. 55-302

[24] ss. 62-305

[25] ss. 101-301

[26] ss. 314-315

[27] Walter Rudin: *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, Mladinska Knjiga, Ljubljana (1970), ss. 164-165

[28] s. 206

[29] ss. 50-51

[30] s. 97

[31] ss. 232-235

[32] Nakhlé H. Asmar ja Loukas Grafakos: *Complex Analysis with Applications*, Springer (2018), ss. 272-273

[33] s. 368

[34] ss. 242-248

[35] ss. 100-274

[36] Walter Rudin: *Principles of Mathematical Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York (1964), ss. 197-198

[37] Fritzsche Klaus ja Hans Grauert: *From Holomorphic Functions to Complex Manifolds*, Springer-Verlag, New York (2002) s.31

[38] ss. 29-34

[39] ss. 34-66

[40] s. 68

[41] $https://encyclopediaofmath.org/wiki/Centred_{f}amily_{o}f_{s}ets$

[42] Jussi Väisälä: *Topologia 2*, Limes ry, Helsinki (1995), s. 6

[43] ss. 40-41

[44] s. 53

[45] s. 13

[46] Steven G. Krantz: *The Carathéodody and Kobayashi Metrics and Applications in Complex Analysis*, The American Mathematical Monthly Vol. 115, No. 4 (Apr. 2008), ss.304-329

[47] Steven G. Krantz: *Function theory of several complex variables*, Second edition., Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, California (1992) s. 433

[48] s. 423

[49] s. 71

[50] s. 128

[51] G. M. Goluzin: *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1969 ss. 411-413

[52] ss. 380-385

[53] $https://encyclopediaofmath.org/wiki/Reinhardt_domain$